

ZENTRALBLATT FÜR MATHEMATIK

18. Band, Heft 6

3. August 1938

S. 241—288

Algebra und Zahlentheorie.

Lineare Algebra, Polynome, Invariantentheorie:

Wedderburn, J. H. M.: The canonical form of a matrix. Ann. of Math., II. s. 39, 178—180 (1938).

Ist $f(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n$ ein irreduzibles separables (d. h. nur einfache Nullstellen besitzendes) Polynom aus einem Körper K , so erhält man bekanntlich eine in K gelegene n - bzw. nr -reihige Matrix A bzw. B mit dem charakteristischen Polynom und dem einzigen von Eins verschiedenen Polynomelementarteiler $f(x)$ bzw. $(f(x))^r$ in der Form

$$A = \begin{pmatrix} -a_1 & -a_2 & \dots & -a_{n-1} & -a_n \\ 1 & 0 & & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} A & 1_n & & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & A & 1_n & \\ & & & A & 1_n \end{pmatrix},$$

wo 1_n die n -reihige Einheitsmatrix bezeichnet (Begleitmatrix, kanonische Normalform). Ist $f(x)$ irreduzibel aber inseparabel (d. h. K von Primzahlcharakteristik p und $f(x)$ Polynom von x^p), so versagt die Normalform B , denn B hat in diesem Falle wohl das charakteristische Polynom $(f(x))^r$, jedoch können mehrere Elementarteiler ungleich Eins sein, der letzte Elementarteiler kann eine niedrigere Potenz von $f(x)$ sein als die r -te. In der vorliegenden Note werden zwei verschiedene in K gelegene, nur von $f(x)$ abhängende Normalformen für diesen Ausnahmefall angegeben. Die erste, auf N. Jacobson zurückgehende setzt an die Stelle der 1_n in B eine n -reihige Matrix, die in der ersten Zeile an der n -ten Stelle eine Eins, sonst lauter Nullen enthält. Die zweite Normalform, die sich durch besondere Einfachheit auszeichnet, benutzt das $f(x)$ zugeordnete separable Polynom $g(x)$ ($f(x) = g(x^{p^m})$ Polynom von x^{p^m} , aber nicht von $x^{p^{m+1}}$) und die mit Hilfe von $g(x)$ gebildete Normalform B und führt im Falle $m = 0$ auf B zurück. Die Beweise schließen sich an des Verf. Buch Lectures on matrices, New York 1934, an.

Franz (Gießen).

Roth, W. E.: On certain matrices and their determinants. Bull. Amer. Math. Soc. 43, 856—861 (1937).

Let $\langle A \rangle U$ denote the direct product $(u_{ij}A)$ and

$$B(U) = \langle A_0 \rangle I_r + \langle A_1 \rangle U + \dots + \langle A_{r-1} \rangle U^{r-1}$$

where I_r is the identity matrix of order r . Then $B(U)$ is similar to a triangular matrix whose diagonal elements are $B(\theta_i) = A_0 + A_1 \theta_i + \dots + A_{r-1} \theta_i^{r-1}$, θ_i the roots of U . Thus $\det B(U) = \prod \det B(\theta_i)$. This result is shown to include a number of theorems on determinants given in the literature.

Jacobson (Chapel Hill, N. C.).

Tocchi, Luigi: Sopra una proprietà delle matrici. Giorn. Mat. Battaglini, III. s. 74, 207—208 (1936).

Wenn eine Matrix keine mit lauter Nullen besetzte Reihe (Zeile oder Spalte) enthält, so ist die kleinste Anzahl von nichtverschwindenden Determinanten der Ordnung h , die sie enthalten muß, damit sie den Rang (Charakteristik) h haben kann, ebenso groß wie die Anzahl der verschwindenden Determinanten der Ordnung h , die sie enthalten muß, damit ihr Rang $< h$ ist. — Diese Anzahl hat der Verf. in einem

früheren Aufsatz [Giorn. Mat. Battaglini 68 (1930)] zu $(n - h + 1)(m - h + 1)$ bestimmt, wo n und m die Anzahlen der Zeilen und der Spalten der Matrix bedeuten.

L. Schrutka (Wien).

Albert, A. Adrian: A quadratic form problem in the calculus of variations. Bull. Amer. Math. Soc. 44, 250—253 (1938).

Beweis des Satzes: f und g seien zwei reelle quadratische Formen in den Variablen x_1, \dots, x_n , und es sei $f > 0$ für alle reellen Wertesysteme der x_1, \dots, x_n außer $0, \dots, 0$, für die $g = 0$. Dann gibt es eine reelle Zahl λ derart, daß $f + \lambda g$ positiv definit ist.

Bessel-Hagen (Bonn).

Oldenburger, Rufus: Relations between ranks of a general matrix. Ann. of Math., II. s. 39, 172—177 (1938).

If, in the multilinear form $\sum a_{ij\dots s} x_i y_j \dots z_s$ in p sets of n variables each, each set of variables is independently subjected to a non-singular linear transformation, certain positive integers remaining invariant can be interpreted as ranks of the p -way matrix $A = (a_{ij\dots s})$. The author has shown (this Zbl. 9, 338) that for $p \geq 3$ dependence relations exist among these ranks. He now investigates further these dependence relations, in particular the case where certain ranks are 1. *MacDuffee* (Princeton).

Oldenburger, Rufus: Representation and equivalence of forms. Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A. 24, 193—198 (1938).

Jede Form der Gestalt $F = \sum a_{ij\dots m} x_i x_j \dots x_m$

mit Koeffizienten aus einem beliebigen Körper, die bei Permutationen ihrer Indizes ungeändert bleiben, kann als Summe von p -ten Potenzen von linearen Formen mit Koeffizienten λ

$$F = \lambda_1 L_1^p + \dots + \lambda_\sigma L_\sigma^p \quad (1)$$

geschrieben werden. Ist σ minimal, so sind bei geg. L_1, \dots, L_σ die λ eindeutig bestimmt. Damit eine zweite Form F' zu F äquivalent sei, ist notw. und hinr., daß F' eine Darstellung wie (1) mit den gleichen $\lambda_1, \dots, \lambda_\sigma$ besitzt, wobei die neuen L'_1, \dots, L'_σ durch Veränderlichkeitstransformation aus L_1, \dots, L_σ hervorgehen. Analoge Sätze gelten für Multilinearformen; die entsprechende Minimalzahl heißt hier „factorisation rank“. Es werden einige Eigenschaften dieser Rangzahl und der Minimalzahl σ in (1) aufgestellt und Bedingungen dafür angegeben, daß die Koeffizientenmatrix der Linearformen L_1, \dots, L_σ in (1) als Diagonalmatrix gewählt werden kann.

van der Waerden (Leipzig).

Weitzenböck, R.: Über Trivektoren V. Akad. Wetensch. Amsterd., Proc. 41, 238—245 (1938).

Eine Syzygie dritter Art (S_3) ist eine Linearform der irreduziblen Syzygien zweiter Art (S_2) mit Koeffizienten, die von a_{ijk} abhängen (vgl. dies. Zbl. 17, 243 und 386). Verf. betrachtet einige S_3 und beweist, daß diese S_3 alle auf eine einzige Syzygie dritter Art reduzierbar sind. (IV. vgl. dies. Zbl. 18, 100.) *J. Haantjes* (Delft).

Bohlin, Karl: Sur la solution de l'équation du cinquième degré. Ann. Mat. pura appl., IV. s. 16, 183—208 (1937).

Vgl. dies. Zbl. 6, 148; 7, 290; 8, 193; 11, 337.

Dobrzycki, S.: Sur l'équation trinôme. Mathematica, Cluj 13, 30—39 (1937).

In this article the author determines bounds for the positive (and, hence, negative) roots p of the equation

$$x^{m+n} + ax^n + b = 0 \quad (1)$$

where a and b are real constants and m and n positive integers. Following the method of solving this equation as introduced by Gauss (Collected Works 3, 85), the author in all cases except that in which $0 \leq a$ and $0 \leq b$ in which there are no positive roots, writes equation (1) in the form $Ax^s + Bx^t = 1$ where $A > 0$, $B > 0$, $s \geq 0$, $t \geq 0$. Hence, setting $Ax^s = \sin^2 \theta$ and $Bx^t = \cos^2 \theta$,

(2)

he eliminates x from (2) by computing $\lambda = |b^m a^{-m-n}|$, finds θ and obtains the desired roots p from equations (2) in terms of the coefficients a and b . Bounds for the roots p

are finally derived from the latter relations for each of the possible combinations of a and b which may be selected from the intervals $x \geq 1$, $0 \leq x \leq 1$, $-1 \leq x \leq 0$ and $x \leq -1$.

Marden (Milwaukee, U. S. A.).

Biggiogero, Giuseppina: *Sulle condizioni perchè due equazioni algebriche abbiano q radici comuni.* Ist. Lombardo, Rend., III. s. 71, 141—146 (1938).

Es seien $a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + \dots + a_m = 0$ und $b_0 x^n + b_1 x^{n-1} + \dots + b_n = 0$ zwei algebraische Gleichungen. Man bilde in bekannter Weise ihre Resultante

$$R = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \dots & a_m & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_0 & a_1 & \dots & a_{m-1} & a_m & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & a_0 & \dots & \dots & \dots & \dots & a_m \\ b_0 & b_1 & b_2 & \dots & b_n & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & b_0 & b_1 & \dots & b_{n-1} & b_n & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & b_0 & \dots & \dots & \dots & b_n \end{vmatrix}.$$

Nennt man M_i die Matrix, die hieraus entsteht, wenn man die letzten i mit den Koeffizienten a und die letzten i mit den Koeffizienten b besetzten Zeilen unterdrückt, nennt man ferner R_i die aus den ersten $m+n-2i$ Zeilen von M_i gebildete Determinante und schließlich $R_i^{(1)}, R_i^{(2)}, \dots, R_i^{(i)}$ die Determinanten, die aus R_i entstehen, wenn man die letzte Spalte durch die nächste, zweitnächste usw. in M_i auf sie folgende ersetzt, so gilt: Die notwendige und hinreichende Bedingung, daß die beiden Gleichungen q Wurzeln gemeinsam haben, ist

$$R_{q-1} = 0, \quad R_{q-1}^{(1)} = 0, \quad \dots \quad R_{q-1}^{(q-1)} = 0, \quad R_q \neq 0.$$

Ein Beispiel zeigt, daß die bei Cesàro, Elementares Lehrbuch der Analysis, deutsch von Kowalewski, S. 383, angegebenen Bedingungen nicht hinreichend sind. Es folgt noch eine Anwendung auf die Doppel- und Wendetangenten einer rationalen Kurve vierten Grades in der Ebene.

L. Schrutka (Wien).

Kirstein, Karl-Friedrich: *Einige Abschätzungen für die Koeffizienten der Teiler eines Polynoms.* Schr. math. Semin. u. Inst. angew. Math. Univ. Berlin 3, 231—248 (1937).

Indem der Verf. einen Satz von C. Siegel [Math. Z. 10, 173—213 (1921), Hilfsatz II] verallgemeinert, beweist er folgende Sätze: Ist $f(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n$ ein Polynom mit beliebigen Koeffizienten, $f(\lambda) = 0$ und $A = \max(|a_0|, |a_1|, \dots, |a_n|)$, so hat der Koeffizient b_k des Polynoms $\frac{f(x)}{\lambda - x} = b_0 + b_1 x + \dots + b_{n-1} x^{n-1}$ das Maximum $A \cdot M_k = A \frac{1}{\lambda_k^{k+1}} (1 + \lambda_k + \dots + \lambda_k^k) = A (1 + \lambda_k + \dots + \lambda_k^{n-1+k})$, wobei λ_k die einzige positive Nullstelle des Polynoms $f_k(x) = 1 + x + \dots + x^k - x^{k+1} - \dots - x^n$ bedeutet. Es gilt: $M_0 < M_1 < \dots < M_{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} > M_{\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor} > \dots > M_{n-1}$. Das Maximum M der Maxima $M_k = M_k(n)$ ist für ungerades n $M = \frac{n+1}{2}$ und für gerades n $M = \frac{n+1}{2} + \frac{1}{6} \frac{2}{n+1} + \frac{1}{45} \left(\frac{2}{n+1}\right)^3 + \frac{19}{7560} \left(\frac{2}{n+1}\right)^5 + \frac{\varepsilon}{3240} \left(\frac{2}{n+1}\right)^7$ mit $0 < \varepsilon < 1$. Bei wachsendem n ist $\lim_{n \rightarrow \infty} M_k(n) = -\frac{1}{1 - 2^{-\frac{1}{k+1}}} = K$ und $\lim_{n \rightarrow \infty} M_{n-1-k}(n) = K - 1$. Es gelten die Ungleichungen

$$M_k < \frac{k}{\log 2} + 2 < \frac{3}{2} k + 2, \quad M_{n-1-k} \leq \frac{k}{\log 2} + 1 < \frac{3}{2} k + 1.$$

Analoge Sätze gelten für $\frac{f(x)}{h(x)}$, wobei $h(x)$ ein beliebiger normierter Teiler des Polynoms $f(x)$ ist.

N. Tschebotarow (Kasan).

Zahlentheorie:

Rama Rao, N.: Some congruences modulo m . Bull. Calcutta Math. Soc. 29, 167—170 (1938).

The author extends his previous results (see this Zbl. 17, 246) to the elementary symmetric functions of a reduced set of residues to a given modulus m . *Davenport*.

Lubelski, S.: Zur Reduzibilität von Polynomen in der Kongruenztheorie. II. Acta Arithmet. 2, 242—261 (1937).

Der Verf. setzt seine Versuche fort, einige Existenzbeweise für Primzahlen rein arithmetisch herzuleiten (vgl. dies. Zbl. 12, 393). Unter anderem gibt er folgendes interessante Kriterium für die Auflösbarkeit einer Gleichung vom Primzahlgrad: Damit $f(x) = 0$ vom Primzahlgrade n lösbar sei, ist notwendig und hinreichend, daß 1. fast alle Primzahlen p , für die $f(x)$ modulo p linear zerlegbar ist, in einer Untergruppe \mathfrak{B}_1 einer Kongruenzgruppe \mathfrak{B} nach einem Modul m liegen, wobei m aus den Faktoren der Diskriminante von $f(x)$ gebildet ist; 2. die Faktorgruppe $\mathfrak{B}/\mathfrak{B}_1$ zyklisch ist; 3. für die Primzahlen p , die in \mathfrak{B}_1 liegen, $f(x) \bmod p$ entweder vollständig zerfällt oder keinen Linearfaktor hat. — Es ist noch folgender „Kronecker-Bauersche Einbettungssatz“ bemerkenswert: Damit fast alle Primteiler eines Polynoms $f(x)$ zugleich Primteiler der Form $x^2 - Dy^2$ (D quadratfrei) seien, ist notwendig und hinreichend, daß $4f(x)$ in der Form $f_1^2(x) - Df_2^2(x)$ darstellbar ist, wobei $f_1(x), f_2(x)$ ganzzahlige Polynome sind. *N. Tschebotarow (Kasan)*.

James, R. D.: On a diophantine equation of the fourth degree. Proc. London Math. Soc., II. s. 44, 140—148 (1938).

The author uses the method of Davenport and Heilbronn (this Zbl. 14, 10) to prove that, if M is a fixed positive integer and N any integer (positive, negative or zero), then the equation

$$N = \sum_{j=1}^{16} x_j^4 - Mx_{17}^4$$

has at least one solution in integral x_1, x_2, \dots, x_{17} . It follows that every positive rational number is the sum of 16 rational biquadrates. It is easily shown that there is an infinity of integers which are not the sum of less than 15 rational biquadrates. *Wright*.

Siegel, Carl Ludwig: Analytische Theorie der quadratischen Formen. (Oslo, 14.—18. VII. 1936.) C. R. congr. int. Math. 1, 104—110 (1937).

Vortrag über drei gleichlautende Arbeiten des Verf. (dies. Zbl. 12, 197; 14, 8; 16, 12), vgl. auch den Bericht dies. Zbl. 17, 247. *Landherr (Rostock)*.

Magnus, Wilhelm: „Über die Anzahl der in einem Geschlecht enthaltenen Klassen von positiv-definiten quadratischen Formen.“ Math. Ann. 114, S. 465—475. Berichtigung. Math. Ann. 115, 643—644 (1938).

Das Hauptergebnis dieser Arbeit (dies. Zbl. 16, 349), S. 473, ist einzuschränken auf primitive Formen. Diese Änderung ist dadurch bedingt, daß Hilfssatz 1 (von Minkowski) falsch zitiert wurde und dadurch die Formel (23), S. 474, in $M(d\mathfrak{C}) = M(\mathfrak{C})$ abzuändern ist. — Des weiteren ist in den ohne Beweis gegebenen Formeln auf S. 475 für $\mu \equiv 1 \pmod{8}$, $\mu > 1$, der Faktor δ_μ zu ersetzen durch $\delta_\mu^* = 1 + 2^{-\mu^*} - 2^{2-\mu}$; dadurch ändern sich die numerischen Werte von $M(\mathfrak{C}_m)$, $m = 9, 10, 11$. *Mahler*.

Corput, J. G. van der: Sur deux, trois ou quatre nombres premiers. III. Akad. Wetensch. Amsterdam, Proc., 41, 97—107 (1938).

Verf. gibt ausführliche Beweise für die Hilfssätze, die in Teil I der gleichnamigen Arbeit (vgl. dies. Zbl. 17, 390) benötigt werden (II. vgl. dies. Zbl. 18, 108). *Heilbronn*.

Corput, J. G. van der: Sur deux, trois ou quatre nombres premiers. Akad. Wetensch. Amsterd., Proc. 41, 217—226 (1938).

Corput, J. G. van der: Sur l'hypothèse de Goldbach. Akad. Wetensch. Amsterdam, Proc., 41, 76—80 (1938).

Bericht über die neueren Ergebnisse im Goldbachschen und verwandten Problemen.

Hans Heilbronn (Cambridge).

Corput, J. G. van der: Contribution à la théorie additive des nombres. I. Akad. Wetensch. Amsterd., Proc. 41, 227—237 (1938).

Let g be a fixed positive integer; let n, x denote (variable) positive integers, p, p', p'' (variable) primes. (1) Almost all n are expressible in each of the three forms $p + x^g, p - x^g, x^g - p$. (2) If $G = \prod_{p-1 \mid g} p$, almost all n satisfying $(n-1, G) = 1$ are expressible in each of the two forms $p'^g \pm p$, and almost all n satisfying $(n+1, G) = 1$ in the form $p - p'^g$ ($p, p' > g+1$). (3) In (1) and (2) w^g can be replaced by a general polynomial $\psi(u)$ with integral coefficients, subject to any necessary congruence conditions on n . (4) Almost all $n \equiv 3 \pmod{24}$ can be expressed as $p^2 + p'^2 + p''^2$. — A general analytical proposition from which these results are to be deduced is formulated, and the first two of the three parts into which the proof is divided are given in this communication. The treatment follows the lines of a previous paper by the author covering the case $g=1$ of (2) (see this Zbl. 18, 52). — The case $p + x^g$ of (1) had already been proved by Davenport and Heilbronn (see this Zbl. 16, 348—349).
Ingham (Cambridge).

Hua, Loo-keng: A problem in the additive theory of numbers of several variables. J. London Math. Soc. 12, 257—261 (1937).

An extension to $k+1$ integral-valued polynomials $F_i(x, y) = \sum a_{\mu\nu}^{(i)} P_\mu(x) P_\nu(y)$ of degree k , is obtained of the result abstracted in this Zbl. 15, 247, for $k=1$. If $\Delta = |a_{\mu\nu}^{(i)}| \neq 0$, there exist integers m_j and $N (= [\frac{1}{2}k+1]2^{k-1})$ such that for any integers $n_j \equiv m_j \pmod{\Delta}$ we can find integers x_i, y_i and appropriate signs $\varepsilon_i = \pm 1$, for which $\sum_{i=1}^N \varepsilon_i F_j(x_i, y_i) = n_j$ ($j=1, \dots, k+1$). Hence if $\Delta = \pm 1$, these are solvable for all n_j . Also, a homogeneous binary form of degree k whose coefficients are multiples of $k!$ can be expressed as a sum of at most $[\frac{1}{2}k+1]2^{k-2}$ terms $\pm (a_i x + b_i y)^k$ with integral a_i, b_i .
G. Pall (Montreal).

Hua, Loo-keng: A generalization of an easier Waring-Kamke problem. J. London Math. Soc. 12, 262—264 (1937).

Let $f_j(x) = \sum_0^k a_{ji} P_i(x)$ be m integral-valued polynomials: Does there exist an integer s such that $\sum_{h=1}^s \varepsilon_h f_j(x_h) = n_j$ ($j=1, \dots, m$) are solvable in integers x_h , for given integers n_j , with appropriate signs $\varepsilon_h = \pm 1$? A necessary and sufficient condition is that the rank r of the matrix (a_{ji}) and the g. c. d. of the r -rowed minor determinants of (a_{ji}) are equal to those of the augmented matrix obtained by adjoining the column of n_j . The least s , if it exists, is $< 2^k$. By taking differences the proof is reduced to that for linear equations.
G. Pall (Montreal).

Buchstab, A.: Asymptotische Abschätzung einer allgemeinen zahlentheoretischen Funktion. Rec. math. Moscou, N. s. 2, 1239—1245 u. deutsch. Zusammenfassung 1246 (1937) [Russisch].

Verf. bezeichnet mit $\Phi_l(k; x; y)$ die Anzahl der natürlichen Zahlen bis x , die $\equiv l \pmod{k}$ sind und lauter Primfaktoren $\geq y$ enthalten. Er zeigt: Ist $(l, k) = 1$ und $\alpha \geq 2$, alle drei Zahlen fest gegeben, so gilt bei wachsendem x

$$\Phi_l\left(k; x; x^{\frac{1}{\alpha}}\right) \sim \frac{\psi(\alpha)}{\varphi(k)} \frac{x}{\log x};$$

hierbei ist $\varphi(k)$ die Eulersche Funktion, und $\psi(\alpha)$ definiert man so: für $2 \leq \alpha \leq 3$ ist $\psi(\alpha) = 1 + \log(\alpha - 1)$ und für $N \leq \alpha \leq N+1$, $N \geq 3$ ganz, ist

$$\psi(\alpha) = \psi(N) + \int_{N-1}^{\alpha-1} \frac{\psi(z)}{z} dz.$$

A. Walfisz (Tiflis).

Rademacher, Hans: The Fourier coefficients of the modular invariant $J(\tau)$. *Amer. J. Math.* **60**, 501—512 (1938).

Let $f(e^{2\pi i\tau}) = 12^3 J(\tau)$. The power series expansion of $f(x)$ has the form $x^{-1} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$. The author proves that for $n \geq 1$,

$$c_n = \frac{2\pi}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{A_k(n)}{k} I_1\left(\frac{4\pi\sqrt{n}}{k}\right), \quad (1)$$

where $I_1(z) = \frac{J_1(iz)}{i}$, and $A_k(n)$ is the Kloosterman sum

$$A_k(n) = \sum_{\substack{h=1 \\ (h,k)=1}}^k e^{\frac{2\pi i}{k}(nh+h')}, \quad hh' \equiv -1 \pmod{k}. \quad (2)$$

The proof is obtained by applying the Hardy-Littlewood method to evaluate the coefficients c_n , dividing the circle $|x| = e^{-2\pi N^{-2}}$ into Farey arcs of order N , and using the modular invariance of $J(\tau)$. As in the work of Kloosterman [*Hamburg. Abh.* **5**, 337—352 (1927)] and Estermann [*ibid.* **7**, 82—98 (1929)], the Farey interval surrounding h/k is divided into the interval $\left(\frac{h}{k} - \frac{1}{k(N+k)}, \frac{h}{k} + \frac{1}{k(N+k)}\right)$ and a number of outer intervals of the form $\left(\frac{h}{k} \pm \frac{1}{kl}, \frac{h}{k} \pm \frac{1}{k(l+1)}\right)$, $l \geq N+k$. Also $f(x)$ in the integrand is expanded in power series. The main term, arising from the central intervals and the term x^{-1} in the expansion of $f(x)$, gives the sum to N terms of the series on the right of (1), and all the error terms are $O(e^{2\pi n N^{-2}} n^{\frac{1}{2}} N^{-\frac{1}{2}+\epsilon})$. The proof of this uses the upper bound $O(k^{\frac{1}{2}+\epsilon}(n, k)^{\frac{1}{2}})$ for the Kloosterman sum (2) and its partial sums, due to Salié (see this *Zbl.* **5**, 162) and Davenport (see this *Zbl.* **6**, 295). The result (1) follows by making $N \rightarrow \infty$. Davenport (Manchester).

Chabauty, Claude, et Charles Pisot: Un algorithme pour l'approximation simultanée de deux nombres réels. *C. R. Acad. Sci., Paris* **206**, 1069—1071 (1938).

Verff. geben eine abgeänderte Form des verallgemeinerten Kettenbruch-Algorithmus von Jacobi (Gesammelte Abhandlungen **6**, 385—426), der der Entwicklung nach nächsten Ganzen im Falle einer einzigen Zahl entspricht. Seien x_0, y_0 reell und x_n, y_n für schon bekannte x_{n-1}, y_{n-1} folgendermaßen definiert: Sind a_{n-1}, b_{n-1} ganze Zahlen mit $|x_{n-1} - a_{n-1}| \leq \frac{1}{2}$, $|y_{n-1} - b_{n-1}| \leq \frac{1}{2}$, so ist

$$x_{n-1} = a_{n-1} + \frac{y_n}{x_n}, \quad y_{n-1} = b_{n-1} + \frac{1}{x_n}.$$

Man verstehe unter P_n, Q_n, R_n die Lösung der Differenzengleichung $V_{n+3} = a_n V_{n+2} + b_n V_{n+1} + V_n$ mit $V_0 = 0, V_1 = 0, V_2 = 1$, oder mit $V_0 = 0, V_1 = 1, V_2 = 0$, oder mit $V_0 = 1, V_1 = 0, V_2 = 0$. Dann gilt: Es ist

$$|P_n - x_0 R_n| < \theta^{n-2}, \quad |Q_n - y_0 R_n| < \theta^{n-2},$$

wo θ eine absolute Konstante $< \sqrt[3]{7/8}$ bedeutet. Der Algorithmus bricht demnach nach höchstens $24 \log \sqrt{a^2 + b^2}$ Schritten ab, falls eine lineare Abhängigkeit $ax_0 + by_0 + c = 0$ mit ganzen a, b, c besteht. Ist der Algorithmus periodisch, so gibt es im durch x_0, y_0 erzeugten Körper eine Einheit, deren Absolutbetrag > 2 ist, während ihre zwei Konjugierten absolut $\leq \sqrt[3]{7/8}$ sind; diese Einheit kann explizit aus dem Algorithmus gebildet werden. Mahler (Manchester).

Mengenlehre und reelle Funktionen.

Schreier, J.: Eine Eigenschaft abstrakter Mengen. *Studia Math.* **7**, 155—156 (1938).

Let E be an arbitrary infinite set. A subset A of E is said to be half of E if the powers of the sets E, A , and $E - A$ are all equal. The following conjecture of Banach

is verified: If E is a given set, then to every half A of E , there may be ordered a set $\varphi(A) \subset A$, so that $\varphi(A)$ is half of A and so that for each sequence of sets E_1, E_2, E_3, \dots , which satisfy the relation $E_{n+1} \subset \varphi(E_n) \subset E$, the relation

$$E_1 \cdot \varphi(E_1) \cdot E_2 \cdot \varphi(E_2) \cdot \dots = 0$$

is true.

Montgomery (Northampton).

Rothberger, Fritz: Eine Verschärfung der Eigenschaft C. *Fundam. Math.* 30, 50—55 (1938).

Sierpiński (*Fundam. Math.* 25, 579, problem 67) has proposed the problem of determining whether linear sets with the property C are invariant under homeomorphisms, or more generally under continuous transformations. A property C' implying property C is defined in terms of neighborhoods and it is shown that C' is invariant under continuous transformations. The question of whether or not C implies C' is open. This question is shown to be equivalent to the question of whether or not C is invariant under continuous transformations.

Montgomery (Northampton).

Sierpiński, Waclaw: Remarque sur le problème de l'invariance topologique de la propriété (C). *Fundam. Math.* 30, 56—58 (1938).

The problem of whether or not property C is invariant under continuous transformations (see preceding review) is shown to be equivalent to the problem of whether or not C is invariant under homeomorphisms. Remarks are made concerning related properties of sets.

Montgomery (Northampton).

Sierpiński, Waclaw: Sur un problème concernant les fonctions projectives. *Fundam. Math.* 30, 59—60 (1938).

It is shown that for every projective set E , which contains a perfect subset, there exists a projective function $f(x)$ setting up a one to one correspondence between E and the set of all real numbers. Kuratowski has proposed this problem for a general projective set E of the power of the continuum.

Montgomery (Northampton).

Sierpiński, Waclaw: Sur un problème concernant les ensembles projectifs. *Fundam. Math.* 30, 61—64 (1938).

If E is any plane set let $f(E)$ be the set of real numbers a such that the line $x = a$ cuts E is a set of the power of the continuum. The nature of $f(E)$ when E is a projective set is studied here. It is shown, assuming the continuum hypothesis, that if E is a set P_n then $f(E)$ is a set C_{n+1} . Without the continuum hypothesis it is shown that if E is a P_2 then the $f(E)$ is a P_4 .

Montgomery (Northampton).

Sierpiński, W.: Sur la mesure de Banach des ensembles linéaires de puissance $< 2^*$. *Mathematica, Cluj* 13, 258—262 (1937).

A function $m(E)$ defined on all linear (plane) sets is said to be a Banach linear (plane) measure (*Fundam. Math.* 4, 7) if: (1) $m(E) \geq 0$ for every E , (2) $m(E)$ is positive on some set, (3) $m(E_1 + E_2) = m(E_1) + m(E_2)$ provided $E_1 \cdot E_2 = 0$, (4) if E_1 may be superimposed on E_2 then $m(E_1) = m(E_2)$. It is shown without the continuum hypothesis that if E is any linear (plane) set of power $< 2^*$, then every Banach measure is zero on E .

Montgomery (Northampton).

Kuratowski, Casimir: Sur les familles monotones d'ensembles fermés et leurs applications à la théorie des espaces connexes. *Fundam. Math.* 30, 17—33 (1938).

A family F of closed sets in a separable metric space X is said to be monotone provided that for any two sets A and B of F we have either $A \subset B$ or $B \subset A$; if further we have either $A \subset$ interior of B or $B \subset$ interior of A , for every pair of sets in F , then F is called strictly monotone. The author shows first that every monotone family F of closed sets contains a countable sub-family D_1, D_2, \dots such that for any pair of sets $A \subset B$ in F there is an n such that $A \subset D_n \subset B$. This enables one to assign indices y ($0 \leq y \leq 1$) to the sets of F so that if $y_1 < y_2$, we have $A_{y_1} \subset A_{y_2}$, $A_{y_1} \neq A_{y_2}$. It is next shown that every continuous transformation f of X into a subset of the interval $(0, 1)$ yields a decomposition of X into a strictly monotone family of sets $f^{-1}(0, y) =$ the set of all $x \in X$ such that $0 \leq f(x) \leq y$; and conversely

given any strictly monotone family F of sets with indices attached so that $A_1 = X$, there exists a real valued function f on X such that for every $y < 1$ we have either $A_y = f^{-1}(0y)$ or $\prod_{z>y} A_z = f^{-1}(0y)$ according as A_y has or has not an immediate successor in F .

— The remainder of the paper is given over to applications of the preceding results to connected spaces. It is shown that a family of cuttings of such a space between two of its points gives rise to a strictly monotone family of sets from which the author deduces certain, for the most part already known, conclusions concerning families of cuttings and of cut points of a connected set. For example, the theorem of the reviewer to the effect that all save a countable number of the cut points of a compact continuum are points of order 2 is so obtained, as is also the reviewer's theorem that every regular (rational) curve can be mapped continuously into an interval in such a way that the points of the interval with finite (countable) inverse sets are dense in the interval.

Whyburn (Virginia).

Fried, Hans: Über die Zusammensetzung von Polynomen. *Fundam. Math.* 30, 164—169 (1938).

L'auteur établit le théorème suivant: Toute fonction de 1-ère classe de Baire $f(x)$ peut-être représentée dans la forme $f(x) = \lim_n P_1 P_2 \dots P_n(x)$, où $P_1(x), P_2(x), \dots, P_n(x)$ sont des polynômes. Ce théorème constitue une solution d'un problème posé par W. Sierpiński [*Fundam. Math.* 24, 1 (1934) (voir ce Zbl. 10, 156)].

Saks.

Faedo, Sandro: Sulle medie delle funzioni a variazione limitata di due variabili. *Ist. Lombardo, Rend.*, III. s. 71, 147—164 (1938).

On sait que si $f(x)$ est à variation bornée au voisinage d'un point sa moyenne dans un intervalle de centre fixe x et longueur $2h$ est une fonction de h à variation bornée. L'auteur donne des extensions au cas de 2 variables en partant de $f(x, y)$ à variation bornée soit au sens de Hardy, soit avec certaines conditions, au sens de Tonelli. Les moyennes étudiées sont celle de f dans un rectangle de centre (x, y) et demi-cotés u, v , celle de $1/2[f(x + \alpha, y + \beta) + f(x + \alpha, y - \beta)]$ dans $(-u \leq \alpha \leq u)$, et une troisième analogue.

Brelot (Bordeaux).

Kaltenborn, H. S.: Existence conditions and a substitution theorem for Stieltjes mean integrals. *Tôhoku Math. J.* 44, 1—11 (1937).

The Stieltjes mean integrals are limits of sums of the form

$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{2} [f(x_i) + f(x_{i-1})] [\varphi(x_i) - \varphi(x_{i-1})]$$

where f and φ are bounded functions on (a, b) , $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ is a subdivision of (a, b) and the limits are either as the maximum of $x_i - x_{i-1}$ approaches zero, or as the subdivisions are made finer. They were originally defined by H. L. Smith [*Trans. Amer. Math. Soc.* 27, 492 (1925)] and by J. F. Steffensen (this Zbl. 6, 21). The author gives additional conditions for their existence and proves that any bounded function f having at most discontinuities of the first kind is integrable in the finer sense with respect to any function of bounded variation. On the basis of an integration

by parts theorem and a substitution theorem he proves theorems of the form: If $\int_a^b \varphi d\psi$, $\int_a^b f \varphi d\psi$ and $\int_a^b f d(\varphi\psi)$ exist and f is bounded on (a, b) , and has no discontinuities in common with φ and ψ , then $\int_a^b f \psi d\varphi$ exists and $\int_a^b f \psi d\varphi = \int_a^b f d(\varphi\psi) - \int_a^b f \varphi d\psi$.

Further $\int_a^b \left(\int_x^b g d\psi \right) f d\varphi = \int_a^b \left(\int_a^x f d\varphi \right) g d\psi$ if the integrals on the left exist, $\int_a^b f d\varphi$ exists and f and g are continuous where φ and ψ have common discontinuities.

Hildebrandt.

Ridder, J.: Das spezielle Perron-Stieltjesche Integral. Math. Z. 43, 637—681 (1938).

The author defines a method of relative derivation with respect to an arbitrary finite function $\alpha(x)$. This leads to a notion of major and minor functions and, further, to a Perron-Stieltjes method of integration. The Perron-Stieltjes integral with respect to an arbitrary finite function has already been defined and studied by Ward [Math. Z. 41, 578—604 (1936); this Zbl. 14, 397], but without an explicit connection with a parallel method of relative derivation. The methods followed by the author of the present paper enable him to state, in the theory of the Perron-Stieltjes integral, the fundamental theorem in virtue of which a function which has everywhere a finite derivative is an indefinite integral of the latter. — More precise results are established for the case when $\alpha(x)$ is of bounded variation or of generalized bounded variation (in the restricted sense). The author discusses various definitions of the Stieltjes method of integration with respect to these functions (e.g. descriptive definitions of the Denjoy-Khintchine type). There is also established a theorem on the integration by parts. — The first chapter contains some general results on the derivation with respect to an arbitrary continuous function. As regards the methods used in that part of the paper they are related to the paper by Petrovsky [Rec. math. Soc. math. Moscou 41, 48—58 (1934); this Zbl. 9, 307].

Saks (Warszawa).

Besicovitch, A. S.: On a problem concerning Lebesgue integrals. Math. Ann. 115, 613—618 (1938).

Es sei $f(x)$ in (a, b) definiert und $S(x, \eta) = \sum f(x + i\eta)\eta$, wo über diejenigen i zu summieren ist, für welche $a < x + i\eta \leq b$. Ist $f(x)$ nach Riemann integrierbar, so gilt $S(x, \eta) \rightarrow \int_a^b f(t) dt = J$ für alle x , wenn $\eta \rightarrow 0$. Nach Ref. (dies. Zbl. 9, 306) gilt dieselbe Relation für jede nach Lebesgue integrierbare Funktion $f(x)$ für fast alle x , falls η nur die Zahlenfolge $\eta = \frac{b-a}{2^n}$ durchläuft. Der Verf. konstruiert eine beschränkte Funktion $f(x)$, für welche $S(x, \eta) \rightarrow J$ nicht für fast alle x stattfindet, wenn η stetig gegen Null konvergiert. Es war bereits bekannt, daß es, wenn η die Zahlenfolge $\eta = \frac{b-a}{n}$ durchläuft, unbeschränkte Funktionen $f(x)$ gibt, für welche $S(x, \eta) \rightarrow J$ nicht für fast alle x stattfindet (vgl. Ursell, dies. Zbl. 17, 159). B. Jessen.

Hartman, Philip, and Richard Kershner: Integral forms and variational orthogonality. Amer. J. Math. 60, 205—226 (1938).

Let $X(t) \equiv \{x_1(t) \dots x_n(t)\}$ and $Y(t) \equiv \{y_1(t) \dots y_n(t)\}$ be n -dimensional vector functions of t , $a \leq t \leq b$; then for a function $F(Y; X)$ there is defined an integral $\int_a^b F(Y; dX)$ as the Riemann limit of $\sum_{i=1}^n F(Y(\tau_i); X(t_i) - X(t_{i-1}))$ which is a special case of an integral of an interval function and includes as special cases the total variation of a function, ordinary Stieltjes integrals, Hellinger integrals, the Riemannian arc length, and Finsler metrics. — The authors are interested in the main in obtaining a decomposition of the integral into components induced by the Lebesgue decomposition of a function of bounded variation: $x(t) = a(t) + s(t) + p(t)$, where $a(t)$ is absolutely continuous, $s(t)$ is purely singular, and $p(t)$ purely discontinuous. As a generalization of this decomposition two vector functions $X_1(t)$ and $X_2(t)$ are said to be completely variationally orthogonal if there exists a Borel set S so that $V(S; x_{i1}) = V([a, b]; x_{i1})$ and $V(S; x_{i2}) = 0$, for $i = 1 \dots n$, where $V(S; x)$ is the variation of $x(t)$ on the set S . It is then proved that if X_1 and X_2 are completely variationally orthogonal, then $\int F(Y; d(X_1 + X_2)) = \int F(Y; dX_1) + \int F(Y; dX_2)$ if $\int |F(Y; dX)|$ exists and for every $\varepsilon > 0$ there exists a δ_ε such that for two sequences of vectors Z_j, W_j such that $\sum_{j=1}^\infty \|Z_j - W_j\| < \delta_\varepsilon$ we have $\left| \sum_{j=1}^\infty F(Y(\zeta_j); Z_j) - \sum_{j=1}^\infty F(Y(\zeta_j); W_j) \right| < \varepsilon$,

$a \leq \zeta_j \leq b$. Similar results are obtained for the case where the decomposition is not completely variationally orthogonal, i.e. the sets S_i depend on i . Applications are made to the special cases mentioned. *Hildebrandt* (Ann Arbor).

Popoviciu, Tiberiu: Sur les différences des fonctions d'une variable réelle. C. R. Acad. Sci. Roum. 2, 112—114 (1938).

En généralisant les résultats de M. A. Marchaud [J. de Math. 6, 337—425 (1927)] l'auteur démontre 1° qu'une fonction mesurable $f(x)$ est continue lorsque l'expression

$$\sum_{i=0}^n (-1)^{n-i} \binom{n}{i} f(x + ih)$$
 tend uniformément vers zéro pour $h \rightarrow 0$ et 2° $f(x)$ admet une dérivée continue d'ordre n lorsque le même subsiste pour l'expression

$$h^{-n} \sum_{i=0}^n (-1)^{n-i} \binom{n}{i} f(x + ih).$$

Marcinkiewicz (Wilno).

Roger, Frédéric: Sur l'équivalence des notions de quadrature et de primitive. C. R. Acad. Sci., Paris 206, 888—890 (1938).

L'auteur signale (sans démonstration) le théorème suivant: Si une fonction continue $F(x)$ possède une dérivée approximative finie, sauf peut-être en des points de la courbe représentative $y = F(x)$ dont l'ensemble est de longueur nulle et est situé sur au plus une infinité dénombrable des courbes rectifiables $y = f_n(x)$, la fonction F est une intégrale indéfinie de sa dérivée approximative. *Saks* (Warszawa).

Roger, Frédéric: Les propriétés tangentielles des ensembles euclidiens de points. Acta math. 69, 99—133 (1938).

Verf. legt dar, daß die bekannten Sätze von Denjoy über die Derivierten reeller Funktionen im Grunde geometrischer Natur sind: Die Begriffe von Tangente usw. lassen sich auf beliebige Punktmengen übertragen und die betr. Sätze wesentlich verallgemeinern. Für C. R.-Ankündigungen vgl. dies. Zbl. 12, 368; 13, 153 u. 406. Die Resultate überschneiden sich z. T. mit Ergebnissen von S. Saks, Fundam. Math. 26 u. 27 (1936); dies. Zbl. 13, 298 u. 15, 122. — E bezeichne im folgenden eine Menge des n -dimensionalen Euklidischen Raumes, M einen Häufungspunkt von E und $\Phi_E(M)$ die Kontingenz von E in M (= Menge der Halbtangenten). $\Phi'_E(M)$ sei die Menge der in $\Phi_E(M)$ enthaltenen vollständigen Geraden. Satz I. Es sei Γ die Menge der M , zu denen es eine abgeschlossene Menge $F(M)$ von durch M gehenden Geraden gibt, die $\Phi'_E(M)$ nicht angehören. Dann besteht Γ aus höchstens abzählbar vielen abgeschlossenen Mengen, und $\Phi_\Gamma(M)$ ist überall fremd zu $F(M)$. Satz II. Es sei nun $F(M)$ speziell eine $(n - p)$ -dimensionale Ebene. Dann besteht das zugehörige Γ aus höchstens abzählbar vielen p -dimensionalen Lipschitzmannigfaltigkeiten. Abgesehen von den Punkten einer (genauer präzisierten) Ausnahmемenge vom p -dimensionalen Maß Null besteht $\Phi'_E(M)$ aus einer p -dimensionalen Ebene; außerhalb dieser kann $\Phi_E(M)$ evtl. noch ein System von $(p + 1)$ -dimensionalen Halbebenen enthalten, die sich aber niemals gegenseitig ergänzen. Satz III. Es sei P ein fester Punkt, Π eine nicht durch P gehende $(n - 1)$ -dimensionale Ebene, Γ die Menge der Punkte von E , für die sich $\Phi_E(M)$ auf eine durch P gehende p -dimensionale Ebene reduziert. Dann projiziert sich Γ von P aus auf Π in eine Menge vom p -dimensionalen Maß Null. — Außer diesen Hauptresultaten enthält die Arbeit Anwendungen auf Differenzierbarkeitskriterien, u. a. auch für komplexe Funktionen. Ferner eine Übertragung auf den Fall von auf E definierten Funktionen, deren Wert ein Punkt eines topologischen separablen Raumes ist. Ferner verschiedene geometrische Umformulierungen und Anwendungen, die den elementaren Charakter der Sätze veranschaulichen sollen. — Die Arbeit wird fortgesetzt. *W. Feller* (Stockholm).

Nicolesco, Miron: Sur quelques propositions d'analyse infinitésimale pluridimensionnelle. C. R. Acad. Sci. Roum. 2, 228—234 (1938).

Using the notation of K. Bögel [J. reine angew. Math. 170, 197—217 (1934)]

and 173, 5—30 (1935); this Zbl. 8, 250 et 11, 59], the author discusses the continuity properties of additive functions of intervals in a k -dimensional euclidean space. *Saks*.

Ursell, H. D.: Note on the transfinite diameter. J. London Math. Soc. 13, 34—37 (1938).

Given a measuring function $h(t)$ such that $\lim h(t) \log 1/t = 0$, a set E is constructed such that the h -measure of E is finite and the capacity of E positive. This disproves a conjecture of R. Nevanlinna. For $h(t) = (\log 1/t)^{-1}$ a set with the above properties does not exist, as shown by Erdős and Gillis (see this Zbl. 17, 115).

Ahlfors (Cambridge, Mass.).

Analysis.

Leja, F.: Remarques sur un théorème de MM. Pólya et Szegő. Ann. Soc. Polon. math. 15, 168—177 (1937).

In the theory of the transfinite diameter, sequences $\{a_\nu\}$ occur satisfying the condition $a_{\mu+\nu} \geq a_\mu + a_\nu$. In this case $\{a_\nu/\nu\}$ is bounded from below and tends to a (finite or infinite) limit. The author is interested in monotony properties of the second sequence if the first one satisfies the condition mentioned. He shows that for each p and $\varepsilon > 0$, we have

$$a_n/n > a_p/p - \varepsilon$$

for almost all n . If the previous condition holds with $>$ instead of \geq , the last inequality holds with $\varepsilon = 0$.

G. Szegő (St. Louis, Mo.).

Hölder, I.: Über eine Darstellung der Eulerschen Konstanten. Ber. Verh. sächs. Akad. Leipzig 89, 167—170 (1937).

Reeller Beweis für die Formel $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{\cos x}{x} dx + \log \varepsilon \right\} = -C$ (vgl. S.-B. Bayer. Akad. Wiss. 1928, 89).

Rogosinski (Cambridge).

Ostrowski, Alexander: Notiz über Funktionaldeterminante von zwei Funktionen mit zwei gemeinsamen Nullstellen. Comment. math. helv. 10, 228—231 (1938).

Drei Sätze über eine Abschätzung der oben angegebenen Funktionaldeterminante.

Rehbock (Bonn).

Ostrowski, Alexander: Über die Absolutabweichung einer differentiiierbaren Funktion von ihrem Integralmittelwert. Comment. math. helv. 10, 226—227 (1938).

Im Intervall $a < x < b$ sei $h(x)$ stetig und differenzierbar und $|h'(x)| \leq m \neq 0$. Dann ist

$$\left| h(x) - \frac{1}{b-a} \int_a^b h(x) dx \right| \leq \left(\frac{1}{4} + \frac{\left(x - \frac{a+b}{2} \right)^2}{(b-a)^2} \right) (b-a)m.$$

Rehbock (Bonn).

Fréchet, Maurice: Sur la portée exacte de l'évanouissement d'un wronskien dans un intervalle. Bull. Calcutta Math. Soc. 29, 121—124 (1938).

Il a été observé (Hadamard, Cours d'Analyse 1, 302) que si le wronskien de plusieurs fonctions s'annule sur tout un intervalle, il n'en résulte pas nécessairement que ces fonctions vérifient sur tout cet intervalle une même relation linéaire et homogène à coefficients non tous nuls. L'A. démontre le théorème suivant: la condition nécessaire et suffisante pour que le wronskien $w[y_1, y_2, \dots, y_n]$ de n fonctions y_1, y_2, \dots, y_n existe et reste nul sur un intervalle j est que: ou bien y_1, \dots, y_n restent nuls sur j ou bien il existe sur j au moins un segment s_1 et en tout cas une famille dénombrable (finie ou non) de segments s_1, s_2, \dots , telle que sur chacun d'eux les y_j soient linéairement dépendants et qu'en chaque point de j (s'il en existe) n'appartenant à aucun de ces segments les $y_j(x)$ soient tous nuls à la fois. *N. Obrechhoff* (Sofia).

Eleonin, Victor: The Wronskian of the functions $x^{k-1} e^{a_j x}$. Giorn. Mat. Battaglini, III. s. 74, 189—193 (1936).

L'A. démontre par trois manières que le wronskien des fonctions $x^{k-1} e^{a_j x}$,

$k_j = 1, 2, \dots, n_j; j = 1, 2, \dots, r; \alpha_j \neq \alpha_s$, est égal à

$$\prod_{i=1}^n (n_i - 1)!! \prod_{r \geq j > k \geq 1} (\alpha_j - \alpha_k)^{n_j n_k} e^{(n_1 \alpha_1 + \dots + n_r \alpha_r)x}, \quad m!! = 1! 2! \dots m!.$$

N. Obrechhoff (Sofia).

Gemant, Andrew: On fractional differentials. *Philos. Mag.*, VII. s. 25, 540—549 (1938).

Adopting the definition of the generalized derivatives of analytic functions, based on the formula $(x^n)^{(q)} = \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(n-q+1)} x^{n-q}$, the author computes these derivatives for some elementary functions, in particular for $q = \frac{1}{2}$, and gives also remarkable graphical illustrations.

G. Szegő (St. Louis, Mo.).

Approximation von Funktionen, Orthogonalentwicklungen:

Sewell, W. E.: Note on the Faber coefficients of a continuous function. *Rev. Ci., Lima* 39, Nr 421, 79—82 (1937).

Let $f(z)$ be analytic in the interior of the Jordan curve C , and let $f^{(p)}(z)$ have continuous boundary values with modulus of continuity $\omega(\delta)$. If $\sum a_n P_n(z)$ is the expansion of $f(z)$ in terms of the Faber polynomials $P_n(z)$ corresponding to C (with a proper normalization) we have

$$|a_n| < M n^{-p} \omega\left(\frac{\varepsilon}{n}\right) r^n.$$

Here $M > 0$ and $\varepsilon > 0$ are independent of n , and $1/r$ is the transfinite diameter of C .

G. Szegő (St. Louis, Mo.).

Merriman, G. M.: Concerning sets of polynomials orthogonal simultaneously on several circles. *Bull. Amer. Math. Soc.* 44, 57—69 (1938).

Walsh and Szegő investigated the sets of polynomials which are orthogonal on two different curves with certain suitable weight functions. Szegő proved [*Transactions* 37, 196 (1935); this *Zbl.* 11, 155] that beside the trivial set $1, z, z^2, \dots$ with the weight function 1 ,

$$1, z, z^2, \dots, z^{m-1}; z^{m-m}(z^m - r^m), \quad n \geq m$$

is the only possible set which is orthogonal on all the circles $|z| = R$, $R > r$, with a suitable weight function [which is necessarily $|z^m - r^m|^{-1}$, $|z| = R$]. Here m is an arbitrary integer. The author shows that the same conclusion holds if the set in question is orthogonal on two distinct concentric circles only. The proof is very complicated.

G. Szegő (St. Louis, Mo.).

Gottlieb, Morris J.: Concerning some polynomials orthogonal on a finite or enumerable set of points. *Amer. J. Math.* 60, 453—458 (1938).

L'au. étudie les polynômes orthogonaux $l_n(x)$, définis par

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} e^{-\lambda \nu} l_n(\nu) l_m(\nu) = \begin{cases} 0 & n \neq m, \\ e^{-n\lambda} (1 - e^{-\lambda})^{-1}, & n = m, \end{cases} \quad (n, m = 0, 1, 2, \dots).$$

Il démontre les formules:

$$l_n(x) = e^{-n\lambda} \sum_{\nu=0}^n (1 - e^{\lambda})^{\nu} \binom{n}{\nu} \binom{x}{\nu},$$

$$(n+1) l_{n+1}(x) - [(n+1)e^{-\lambda} + n + (e^{-\lambda} - 1)x] l_n(x) + ne^{-\lambda} l_{n-1}(x) = 0,$$

$\sum_{n=0}^{\infty} l_n(x) z^n = (1-z)^x (1 - e^{-\lambda} z)^{-x-1}$, d'où, par la méthode de Darboux, il obtient la formule asymptotique $l_n(x) = (-1)^n (1 - e^{-\lambda})^{-x-1} \binom{x}{n} + O(n^{-R(x)-2})$, uniformément pour $|x| \leq \omega$.

N. Obrechhoff (Sofia).

Grünwald, Géza, und Paul Turán: Über Interpolation. *Ann. Scuola norm. super. Pisa*, II. s. 7, 137—146 (1938).

Let the weight function $w(x)$, $-1 \leq x \leq 1$, be of the type $w(x) \geq m$ or of the type $w(x) \geq m(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}$ where $m > 0$. Let $L_n(f)$ be the Lagrange interpolation polynomials associated with the roots of the orthogonal polynomials corresponding

to $w(x)$. Shohat [Ann. of Math. 34 (1933); this Zbl. 6, 159] investigated the convergence of $L_n(f)$ in case of the first type. The authors are interested primarily in the second type. They show that if the best approximation of $f(x)$ is of a sufficiently high order, we have $\lim_{n \rightarrow \infty} L_n(f) = f(x)$, uniformly in $-1 \leq x \leq +1$. For instance, this is true if the modulus of continuity of $f(x)$ is $O(\delta^{1+\varepsilon})$, $\varepsilon > 0$. Two different proofs of this statement are given. Similar arguments can be applied in case of the first type.

G. Szegő (St. Louis, Mo.).

Ghika, Al.: Sur une généralisation des séries de faculté. C. R. Acad. Sci. Roum. 2, 20—25 (1937).

The basis is a curve C_∞ , dividing the z -plane into 2 simply connected infinite regions D, D' and having a simple closed rectifiable transform under $\zeta = 1/z$; and the set $\Omega(C_\infty)$ of all functions $f(z)$ such that $\int_{C_\infty} |f| \cdot |dz| < \infty$, $\int_{C_\infty} \frac{f(z)}{z-x} dz = 0$ for x interior to D' , and $f(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_\infty} \frac{f(z)}{z-x} dz$ for x interior to D . C. R. Adams (Providence).

Reihen:

Hamilton, Hugh J.: Some theorems on subsequences. Bull. Amer. Math. Soc. 44, 298—304 (1938).

Für jede reelle Folge (a_k) mit konvergenter $\sum_k |a_k|$ gibt es eine Teilfolge (a'_j) mit $|\sum_j a'_j| \geq \frac{1}{2} \sum_k |a_k|$. Das Ziel der vorliegenden Note ist es, entsprechende Aussagen für komplexe Folgen zu machen. Dazu sei \mathfrak{A} die Klasse aller (endlichen oder unendlichen) Folgen $A \equiv (a_k)$ nichtverschwindender komplexer Zahlen mit $\sum_k |a_k| < \infty$, ebenso \mathfrak{B} die Klasse aller (unendlichen) Folgen $B \equiv (b_k)$ nichtverschwindender komplexer Zahlen mit $\sum_k |b_k| = \infty$. Im wesentlichen wird gezeigt: 1. Zu einer beliebigen Folge $A \equiv (a_k) \in \mathfrak{A}$ gibt es eine Teilfolge (a'_j) mit $|\sum_j a'_j| = \text{Max}_S |\sum_j a'_j|$, wobei $S \equiv (a'_j)$ alle Teilfolgen von A durchläuft. 2. Es ist $\varrho \equiv \frac{\text{fin}}{A} \text{Max}_S |\sum_j a'_j| / \sum_k |a_k| = \frac{1}{\pi}$, wenn $A \equiv (a_k)$ alle Folgen aus \mathfrak{A} und $S \equiv (a'_j)$ jeweils alle Teilfolgen von A durchläuft. Es gibt jedoch keine Folge $A \in \mathfrak{A}$, für die $\text{Max}_S |\sum_j a'_j| / \sum_k |a_k| = \varrho$ ist. 3. Zu einer beliebigen Folge $B \equiv (b_k) \in \mathfrak{B}$ gibt es eine Teilfolge (b'_j) mit

$$\begin{aligned} \overline{\lim}_N \left| \sum_j b'_j \right| / \sum_{k=1}^N |b_k| &= \overline{\lim}_T \overline{\lim}_N \left| \sum_j b'_j \right| / \sum_{k=1}^N |b_k| = \overline{\lim}_N \overline{\lim}_T \left| \sum_j b'_j \right| / \sum_{k=1}^N |b_k| \\ &= \overline{\lim}_N \text{Max}_T \left| \sum_j b'_j \right| / \sum_{k=1}^N |b_k|, \end{aligned}$$

wobei $T \equiv (b'_j)$ alle Teilfolgen von B durchläuft und \sum_j jeweils die Summation über diejenigen Elemente b'_j bzw. b'_j bedeutet, die unter den Elementen b_1, b_2, \dots, b_N vorkommen. 4. Es ist $\sigma \equiv \frac{\text{fin}}{B} \text{Max}_T \overline{\lim}_N \left| \sum_j b'_j \right| / \sum_{k=1}^N |b_k| = \varrho$, wenn $B \equiv (b_k)$ alle Folgen aus \mathfrak{B} und $T \equiv (b'_j)$ jeweils alle Teilfolgen von B durchläuft. Es gibt eine Folge $B \in \mathfrak{B}$, für die $\text{Max}_T \overline{\lim}_N \left| \sum_j b'_j \right| / \sum_{k=1}^N |b_k| = \sigma$ ist. F. Lösch (Berlin-Adlershof).

Boas jr., R. P.: Tauberian theorems for $(C, 1)$ summability. Duke math. J. 4, 227—230 (1938).

Let $s_n = u_1 + \dots + u_n$, $\sigma_n = (s_1 + \dots + s_n)/n$. If $\sigma_n - s = o(n^{-\varepsilon})$ and $u_n < O(n^{\varepsilon-1})$ ($0 \leq \varepsilon \leq 1$), then $s_n \rightarrow s$; and o and O may be interchanged if $0 < \varepsilon \leq 1$. With the stronger hypothesis $u_n = O(n^{\varepsilon-1})$ the first result is included in a theorem of Ananda Rau [Proc. London Math. Soc. (2) 34, 414—440, Theorem 4; this Zbl. 6, 10]. Ingham.

Boas jr., R. P.: Some gap theorems for power series. *Duke math. J.* 4, 176—188 (1938).

1. If (a) $f(\theta) \sim \sum a_n e^{in\theta}$ is of bounded variation near $\theta = 0$, (b) there exists a sequence of "gaps" $a_n = 0$ (1) for $n_k - \varphi(n_k) < n < n_k + \varphi(n_k)$, (c) $a_n = O\{\varphi(n)^\delta\}$, $\delta > 0$, where the increasing function $\varphi(n) = O(n^q)$ ($0 < q < 1$), then $\lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{-n_k}^{n_k} a_n$ exists and equals $f(0)$. A generalisation of Riemann's "localisation" theorem is used. 2. Corresponding to any limitation of the coefficients $a_n = O[\lambda(n)]$ [$\lim \lambda(n)^{1/n} = 1$] there exists a gap hypothesis $a_n = 0$, $n_k < n < n_k + \varphi(n_k)$, which ensures that $s_{n_k} - f(x_k) \rightarrow 0$ where $s_n = a_0 + \dots + a_n$, $f(x) = \sum a_n x^n$, and x_k is a suitable sequence tending to 1. Special cases give weakened forms of known Tauberian theorems. *Macintyre* (Aberdeen).

Weisel, Heinrich: Über eine besondere Gattung goniometrischer Funktionenreihen. *Deutsche Math.* 2, 721—732 (1937).

Szász, Ottó: Über die Partialsummen Fourierscher Reihen. *Mat. természett. Értes.* 56, Tl 2, 382—395 u. dtsch. Zusammenfassung 396 (1937) [Ungarisch].

The author obtains remarkable improvements of the theorems of Paley on Fourier series with positive coefficients. His method is based on the Riemann summation of the Fourier series. Let $\varphi(x) \sim a_0/2 = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx$ and $\omega(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx$ be an even or an odd function, respectively, with positive Fourier constants. In the first case the convergence of $\sum a_n$ and the inequality

$$a_0/2 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \leq \liminf_{x \rightarrow 0} \left\{ 2x^{-2} \int_0^x \varphi(t)(x-t) dt \right\} = M$$

is proved provided M is finite. In the second case

$$\sum_{v=1}^n v b_v < 1,38 \cdot M' \cdot n$$

holds for each n provided $x^{-1} \int_0^x \omega(t) dt \leq M'$ for $0 < x < 2,34$. Moreover we have the inequalities $\left| \sum_{v=1}^n b_v \sin vx \right| < 2,38 \cdot \max | \omega(x) |$. The analogous questions for Fourier integrals are also discussed. *G. Szegő* (St. Louis, Mo.).

Spezielle Funktionen:

Bateman, H., and S. O. Rice: Integrals involving Legendre functions. *Amer. J. Math.* 60, 297—308 (1938).

Verff. betrachten zunächst Potentialfunktionen mit axialer Symmetrie in Form eines bestimmten Integrales, das eng mit den Integralausdrücken von Beltrami zusammenhängt. Andererseits gehen sie von einem symmetrischen Potentialausdruck in Gestalt eines Laplaceschen bestimmten Integrales aus. Durch Vergleichung dieser Integralausdrücke ergeben sich Identitäten, welche Verff. darauf beweisen. Diese Identitäten werden auf Legendresche Funktionen erster und zweiter Art angewandt. Hieraus ergeben sich Formeln für das Produkt zweier solcher Legendreschen Funktionen in Form bestimmter Integrale, deren Integranden Legendresche Funktionen enthalten. Verff. wenden auf diese Integralausdrücke die Methode der analytischen Fortsetzung an und gelangen so zu einer Reihe neuer Integralformeln für Produkte Legendrescher Funktionen. Während diese Formeln sich alle auf Legendresche Funktionen ganzzahliger Ordnung beziehen, gehen Verff. hierauf zu Legendreschen Funktionen gebrochener Ordnung über. Als allgemeinste Formeln ergeben sich unbestimmte und unendliche Integralausdrücke. Zum Schluß verwenden Verff. ihre Integralformeln zur Berechnung der Koeffizienten einer Reihenentwicklung Tchebycheffscher Polynome nach Produkten Legendrescher Funktionen erster und zweiter Art ganzzahliger Ordnung.

M. J. O. Strutt (Eindhoven).

Erdélyi, Artur: Die Funksche Integralgleichung der Kugelflächenfunktionen und ihre Übertragung auf die Überkugel. *Math. Ann.* 115, 456—465 (1938).

The author proposes a new derivation of Funk's integral equation

$$\mu_n Y_n(\theta, \varphi) = \int_0^\pi \int_{-\pi}^{+\pi} K(\cos \gamma) Y_n(\theta', \varphi') \sin \theta' d\theta' d\varphi',$$

where K is an arbitrary function, γ the spherical distance of (θ, φ) and (θ', φ') , and Y_n an arbitrary surface harmonic of degree n . The characteristic value μ_n depends on K and n . The derivation is based on the special case

$$K(\varrho) = e^{i\alpha\varrho}, \quad \mu_n = (2\pi)^{\frac{1}{2}} i^n \alpha^{-\frac{1}{2}} J_{n+\frac{1}{2}}(\alpha),$$

which is equivalent with a wellknown identity. From here the general formula follows by means of Fourier's integral theorem. — An analogous treatment of the ultraspherical case is also indicated.

G. Szegő (St. Louis, Mo.).

Howell, W. T.: A note on Hermite polynomials. *Philos. Mag.*, VII. s. 25, 600—601 (1938).

Verf. leitet für das Produkt zweier Hermitescher Polynome einen Summenausdruck ab, dessen Glieder Hermitesche Polynome enthalten. Hierzu geht er von einem früher abgeleiteten unendlichen Integral aus, dessen Integrand das Produkt zweier Weberscher Funktionen und einer Exponentialfunktion ist. Durch Anwendung der Fourierschen Transformationsformel auf dieses unendliche Integral erhält er einen Ausdruck für das Produkt zweier Weberscher Funktionen, dessen rechte Seite ein unendliches Integral darstellt, das ausgerechnet die eingangs erwähnte Summe ergibt. *M. J. O. Strutt.*

Beale, Frank S.: On the polynomials related to the differential equation $\frac{1}{y} \frac{dy}{dx} = \frac{a_0 + a_1 x}{b_0 + b_1 x + b_2 x^2} = \frac{N}{D}$. *Ann. math. Statist.* 8, 206—223 (1937).

This article deals with a system of polynomials, $P_n(k, x)$, associated with the solutions of Pearson's differential equation, as previously discussed by E. H. Hilbrandt (see this *Zbl.* 4, 344). This general system includes the classical polynomials of Hermite, Legendre, Laguerre and Jacobi, employed rather extensively in statistical theory. Beyond this application the present paper which treats exhaustively the distribution of the zeros of such polynomials, has little direct statistical import. In contrast to many analogous investigations, employing differential equations of the second order, the methods here used are based for the most part upon differential equations of the first order.

Albert A. Bennett (Providence).

Howell, W. T.: On a class of functions which are self-reciprocal in the Hankel transform. *Philos. Mag.*, VII. s. 25, 622—628 (1938).

Verf. geht von einem Titchmarshschen Ergebnis aus, das für eine Funktion unter gewissen Bedingungen eine Selbstreziprozität in bezug auf eine Hankelsche Transformation feststellt und leitet dieses Ergebnis mit Hilfe einiger bekannter Formeln der operatorischen Rechenweise ab. Als erstes Beispiel für eine solche Funktion behandelt er das Produkt einer Exponentialfunktion, einer Potenz und eines Laguerreschen Polynoms. Als zweites Beispiel nennt er ein Batemansches Polynom. Er gibt einige weitere Beispiele zu seiner Methode zur Bestimmung der Selbstreziprozität vorgegebener Funktionen. Das erste Beispiel enthält den Quotienten einer Exponentialfunktion und einer Potenz. Bei der Behandlung ergibt sich eine unendliche Integralformel, deren Integrand das Produkt einer Besselschen Funktion, einer Exponentialfunktion und einer Laguerreschen Funktion ist. Das Ergebnis enthält das Produkt einer Exponentialfunktion, einer Potenz und einer Laguerreschen Funktion. Verf. betrachtet einige Sonderfälle dieser Formel. In einem Anhang wendet er seine Ergebnisse zur Lösung einer Integralgleichung an.

M. J. O. Strutt (Eindhoven).

Whittaker, J. M., and W. N. Bailey: Note on the products for the theta-functions. *J. London Math. Soc.* 13, 114 (1938).

Differentialgleichungen, allgemeine Theorie:

Mambriani, Antonio: Equazioni differenziali lineari aventi soluzioni polinomiali. Boll. Un. Mat. Ital. **17**, 26—32 (1938).

Es handelt sich um lineare homogene Differentialgleichungen m -ter Ordnung, bei welchen der Koeffizient der k -ten Ableitung der unbekannten Funktion entweder ein Polynom $(k-1)$ -ten Grades für $k \geq 2$, ersten Grades für $k \leq 2$ oder ein Polynom k -ten Grades für jedes k ist. Verf. gibt notwendige und hinreichende Bedingungen für die Existenz eines die Gleichung befriedigenden Polynoms gegebenen Grades sowie explizite Ausdrücke für solche Polynome. *G. Cimmino* (Napoli).

Erugin, N. P.: La substitution exponentielle pour un système irrégulier d'équations différentielles linéaires. C. R. Acad. Sci. URSS, N. s. **17**, 239—241 (1937).

Compléments au mémoire III de Lappo-Danilevski (ce Zbl. **9**, 350—352). L'auteur obtient une représentation générale de la matrice exponentielle $W(b)$ pour le système différentiel étudié dans ce mémoire. Considérée d'un point de vue général, c'est une fonction à un nombre infini de branches. Exemples numériques suivent. *Janczewski*.

Lang, Gaines B.: On finite systems of linear differential equations of infinite order with constant coefficients. Ann. of Math., II. s. **39**, 235—246 (1938).

Part I is concerned with the equation $\sum_{\nu=0}^{\infty} \beta_{\nu} y^{(\nu)}(x) = \varphi(x)$ [recently studied, and "semi-local" solution $y(x)$ found under certain conditions, by Sheffer (see this Zbl. **18**, 136), where $\varphi(x)$ is a known entire function of exponential type $\leq q$ and the β_{ν} are such that $\sum \beta_{\nu} t^{\nu}$ represents a function analytic for $|t| \leq q$. The general solution of exponential type $\leq q$ is determined, as the sum of two contour integrals about a suitable circle c of radius $q + \varepsilon$ about $x = 0$, essentially by Carmichael's adaptation of the Pincherle transformation. In Parts II—V analogous questions for differential systems (non-singular and singular), for difference systems, and for mixed systems are considered. *C. R. Adams* (Providence).

Cartovitch, N.: Sul calcolo effettivo del periodo del moto perturbato in un caso tipico di prima approssimazione. Atti Accad. naz. Lincei, Rend., VI. s. **27**, 65—70 (1938).

Für die Periode einer Lösung von $\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = \omega^2(x-a)(x-b) + \varepsilon g(x)$ wurde von Levi-Civita (dies. Zbl. **18**, 21) in erster Näherung ($\varepsilon =$ Störungsparameter) ein Ausdruck angegeben. Der Autor gibt diesem Ausdruck durch Umformung eine bequemere Gestalt. *Rellich* (Marburg, Lahn).

John, Fritz: A note on the maximum principle for elliptic differential equations. Bull. Amer. Math. Soc. **44**, 268—271 (1938).

Damit eine Schar F von zweimal stetig differenzierbaren Funktionen $u(x_1, \dots, x_n)$ einer linearen elliptischen Differentialgleichung der Form

$$\sum_{i,k} a_{ik}(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_k} + \sum_i b_i(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} = 0$$

[wo also die quadratische Form $\sum a_{ik}(x) \xi_i \xi_k$ für jedes $x = (x_1, \dots, x_n)$ positiv semi-definit ist] genügt, ist notwendig und hinreichend, daß die Schar F linear ist und keine Funktion u aus F ein eigentliches Maximum besitzt. Von einer Funktion wird hierbei gesagt, sie besitze an einer Stelle ein eigentliches Maximum, wenn dort die ersten Ableitungen verschwinden und die mit den zweiten gebildete quadratische Form negativ definit ist. Der Beweis beruht auf der Schwerpunktsdarstellung der konvexen Hülle einer Punktmenge. *W. Fenchel* (Kopenhagen).

Bremekamp, H.: Quelques applications de la méthode des approximations successives. Akad. Wetensch. Amsterd., Proc. **41**, 291—300 (1938).

Verf. behandelt durch die Methode der sukzessiven Approximationen das Anfangswertproblem für eine spezielle Gleichung der Form $u_{xy} = f(x, y, u, u_x, u_y)$ (man kann

hierzu eine allgemeine Darstellung z. B. im Lehrbuch von Courant-Hilbert, Methoden der mathematischen Physik II, Kap. V, § 5 finden). *G. Cimmino* (Napoli).

Pedrinì, Antonio: Sopra un'applicazione delle funzioni quasi analitiche alle equazioni differenziali. Ist. Lombardo, Rend., III. s. 71, 177—185 (1938).

Die Existenz einer für $t = 0$ identisch verschwindenden nichttrivialen Lösung $u(x, t)$ der partiellen Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten

$$\frac{\partial^m u}{\partial x^m} = a_0 \frac{\partial^m u}{\partial t^m} + a_1 \frac{\partial^{m-1} u}{\partial t^{m-1}} + \cdots + a_{n-1} \frac{\partial u}{\partial t} + a_n u \quad (m > n)$$

wird auf Grund eines Satzes von Carleman über quasianalytische Funktionen bewiesen. Außerdem kann man für jedes $\varepsilon > 0$ eine solche Lösung unter der Nebenbedingung $\max_{0 \leq t < \infty} |u(x, t)| < \exp\left(\frac{m}{x^{m-n}} + \varepsilon\right)$ bestimmen. *G. Cimmino* (Napoli).

Théodoresco, N.: Les solutions élémentaires des systèmes d'équations aux dérivées partielles à caractéristiques multiples. Rev. math. Union Interbalkan. 2, 33—44 (1938).

Die Konstruktion der Grundlösung für ein homogenes System partieller Differentialgleichungen erster Ordnung aus der in dies. Zbl. 14, 349 ref. Arbeit wird auf den Fall übertragen, daß die charakteristische Form von der Gestalt $P^2 Q$ ist, wobei P eine quadratische Differentialform darstellt, Q eine solche $(n-4)$. Grades. *W. Feller*.

Collatz, L.: Konvergenz des Differenzenverfahrens bei Eigenwertproblemen partieller Differentialgleichungen. Deutsche Math. 3, 200—212 (1938).

Die Untersuchung betrifft ein Eigenwertproblem von der Gestalt

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(a \frac{\partial f}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(c \frac{\partial f}{\partial y} \right) + (q + \lambda p) f = 0,$$

dabei seien $a(x, y)$, $c(x, y)$, $q(x, y)$ und $p(x, y)$ zweimal stetig differenzierbare Funktionen und a, c, p mögen zwischen positiven Grenzen schwanken. Der kleinste Eigenwert der vorgelegten Differentialgleichung mit $f = 0$ als Randbedingung sei λ_1 , der kleinste Eigenwert für das Eigenwertproblem bei einer zugehörigen Differenzengleichung, die sich auf ein durch n -fache Unterteilung entstandenes Gitter bezieht, sei λ_1^n . Der Gegenstand der Arbeit ist der Beweis einer Ungleichung von der Form

$$|\lambda_1^n - \lambda_1| \leq \frac{\text{const}}{n^2}. \quad \text{Funk (Prag).}$$

Krein, M.: Sur les opérateurs différentiels autoadjoints et leurs fonctions de Green symétriques. Rec. math. Moscou, N. s. 2, 1023—1070 (1937).

Exposé détaillé des résultats antérieurs (ce Zbl. 13, 401) avec compléments. Voir aussi des travaux parallèles de l'auteur — ce Zbl. 14, 64, 212; 15, 23; 16, 23.

Janczewski (Leningrad).

Differential- und Integralgleichungen der mathematischen Physik, Potentialtheorie:

Picone, Mauro: Vedute unitarie sul calcolo delle soluzioni delle equazioni alle derivate parziali della fisica-matematica. Estratti delle Atti 1. convegno mat. appi. Roma 36 pag. (1936).

Verf. betrachtet den Funktionalraum, deren Elemente (Hilbertsche Vektoren, kurz H.V.) Systeme von n in den n (endlichen oder unendlichen, auch von verschiedenen Dimensionen) Gebieten T_1, T_2, \dots, T_n quadrat-summierbaren (reellen oder komplexen) Funktionen sind. Er spricht folgenden Grundsatz aus: Alle auf die Integration der Systeme gewöhnlicher oder partieller linearer Differentialgleichungen mit beliebig vielen unbekannten Funktionen und unabhängigen Veränderlichen sich beziehende Probleme lassen sich auf die Aufgabe zurückführen, für eine gegebene Folge von linear unabhängigen H.V. F_s und eine gegebene Konstantenfolge c_s einen H.V. U zu bilden, dessen inneres Produkt mit jedem F_s gleich c_s ist (Fischer-Rießsches vektorielles Integralgleichungssystem, kurz F.R.I.). Eine auch für die numerische Rechnung geeignete

Methode, um diese Aufgabe zu lösen, besteht darin, daß man $U^{(n)} = V + \sum_1^n \gamma_k^{(n)} \bar{F}_k$

V beliebiger H.V., \bar{F}_k komplex konjugiert zu F_k) setzt und bei passender Wahl der Konstanten $\gamma_k^{(\nu)}$ die ν ersten Gleichungen des F.R.I. befriedigt; notwendig und hinreichend dafür, daß das F.R.I. eine Lösung zuläßt, ist die Konvergenz (im Mittel) von $U^{(\nu)}$ für $\nu \rightarrow \infty$. Wenn diese Konvergenz für einen besonderen H.V. V statthat, so gilt das auch für jeden anderen H.V. V , und bei variierendem V beschreibt $\lim_{\nu \rightarrow \infty} U^{(\nu)}$

die Gesamtheit aller Lösungen des gegebenen F.R.I. — Als erste Beispiele für die Anwendung dieser Methode betrachtet Verf. die linearen Integralgleichungen 1., 2. oder 3. Art vom Volterra-Fredholmschen oder Picardschen Typus, sogar allgemeiner lineare Integralgleichungssysteme (wobei die gesuchte Lösung ein H.V. sein soll); denn er zeigt, wie sie auf F.R.I. unmittelbar zurückgeführt werden können. Dasselbe gilt auch für einen komplizierteren Typus von linearen Integralgleichungssystemen, bei welchen die gesuchte Lösung aus einer beliebigen Anzahl von Konstanten, Funktionen einer Veränderlichen, zweier Veränderlichen usf. besteht. Zu solchen Systemen wird man bei der Untersuchung von typischen partiellen Differentialgleichungssystemen der mathematischen Physik geführt, wie z. B. das allgemeinste System von 3 linearen partiellen Differentialgleichungen 2. Ordnung mit 3 unbekannten Funktionen $u_k(x, y, z)$ im Würfel $0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, 0 \leq z \leq 1$, vereinigt (als Randbedingung) mit dem allgemeinsten System von 3 linearen partiellen Differentialgleichungen 1. Ordnung auf einer jeden der 6 Seiten des Würfels. Jede u_k läßt sich durch ihre Werte in den Ecken des Würfels, die von $\frac{\partial^2 u_k}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 u_k}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 u_k}{\partial z^2}$ auf den zu x, y, z bzw. parallelen Kanten, die von $\frac{\partial^4 u_k}{\partial y^2 \partial z^2}, \frac{\partial^4 u_k}{\partial z^2 \partial x^2}, \frac{\partial^4 u_k}{\partial x^2 \partial y^2}$ auf den zu yz, zx, xy bzw. parallelen Seiten, die von $\frac{\partial^6 u_k}{\partial x^2 \partial y^2 \partial z^2}$ im ganzen Würfel mittels einer einfachen Formel explizit ausdrücken; setzt man diese Ausdrücke für die u_1, u_2, u_3 in das gegebene Differentialgleichungssystem ein, so bekommt man ein System von 21 Integralgleichungen des vom Verf. studierten Typus, wobei 24 Konstanten, 36 Funktionen einer Var., 18 Funkt. zweier Var., 3 Funkt. dreier Var. als Unbekannte auftreten. Die Zurückführung auf ein derartiges System gelingt auch, wenn das gegebene Differentialgleichungssystem nicht nur von den drei räumlichen Koordinaten x, y, z , sondern auch von der Zeit t abhängt, und die unbekannten Funktionen außer den Randbedingungen in bezug auf $x y z$ noch den Anfangsbedingungen in bezug auf t genügen müssen. — Es folgen noch weitere Anwendungen in spezielleren Fällen (darunter bemerkenswert der Fall einer partiellen Differentialgleichung 4. Ordnung), wobei auch die numerische Auswertung der ersten Approximationen nach der oben geschilderten Methode angegeben wird. *Cimmino*.

Brelot, Marcel: Sur le problème de Dirichlet et les fonctions sous-harmoniques. C. R. Acad. Sci., Paris 206, 1161—1163 (1938).

Any bounded open set D whose boundary F is a continuum may be approximated to by a descending sequence of bounded regular (e. g. nested) domains. Using this "outer" approximation of the set the author defines for $D + F$ an "outer" solution of the Dirichlet problem, a sweeping-out process ("hyperbalayage"), and an "outer" Green function. A point $P \in F$ is said to be hyperstable if for any function φ continuous on F we have $u(P) = \varphi(P)$, where u is the "outer" solution of the Dirichlet problem for $D + F$ and φ . There is given a necessary and sufficient condition for a point P in F to be hyperstable, from which it follows that hyperstability is a local property of a point. Some other conditions for the hyperstability of a point $P \in F$ are based on the properties of the outer Green function $G_e(P, Q)$ ($Q \in D + F$). *Saks* (Warszawa).

Opatowski, Isacco: Sulla generalizzazione della funzione associata e sui potenziali elicoidali. Estratto dagli: Atti 1. Congr. Un. Mat. Ital. 387—390 (1938).

Es handelt sich um Newtonsche Potentiale, die nach Einführung von Koordinaten $r, \varphi, w = z - m\varphi$ (r, φ, z Zylinderkoordinaten, m eine Konstante) nur von r und w

abhängen. Zu ihnen bestimmt Verf. eine konjugierte Stromfunktion W derart, daß $\Delta W = 0$ und die Flächen $W = \text{konst.}$ zu den Äquipotentialflächen senkrecht stehen. Damit gelingt dann auch die Berechnung der Kraftlinien. Anwendung auf den Spezialfall von Potentialen der Form $p(r)q(w)$.
W. Feller (Stockholm).

Hurst, C.: The potential problem of a sphere lying between infinite conducting planes. *Philos. Mag.*, VII. s. 25, 282—290 (1938).

Let $z = \pm c$ be the two conducting planes, $x^2 + y^2 + (z - d)^2 = a^2$ the equation of the surface of the conducting sphere. The harmonic function

$$V = (-)^n n! r^{-n-1} P_n(\cos \theta) + (-)^n \sum_{m=0}^{\infty} r^m P_m(\cos \theta) \int_0^{\infty} (t^{m+n}/m!) (dt/2 \operatorname{sh} 2ct) \cdot T$$

in which $T = e^{-2ct} - (-)^m e^{-2dt} - (-)^n [e^{2dt} - (-)^m e^{-2ct}]$, is expressed in terms of the generalised Zeta-function $\zeta(p+1, \frac{1}{2} \mp \frac{1}{2} d/c)$ and formulae suitable for computation are obtained by expanding the Zeta-function in power of $d/2c$. — The coefficients A_n in the series $V = \sum A_n V_n$ are determined by a system of linear equations which is solved by a method of successive approximations. A table is given of the values of these coefficients for different values of (a/c) between 0,1 and 0,7 and another table compares the capacity of the condenser for $d/c = 0,2$ with that for $d = 0$ for the same seven values of a/c .
H. Bateman (Pasadena).

Bateman, H.: A partial differential equation associated with Poisson's work on the theory of sound. *Amer. J. Math.* 60, 293—296 (1938).

Es handelt sich um eine bereits von Poisson angegebene Methode zur Lösung der dreidimensionalen Wellengleichung. Hierzu geht man in die Wellengleichung ein mit $U(w, \mu, \Phi)/r$, wobei $\mu = \cos \theta$ und r, θ, Φ räumliche Polarkoordinaten sind. Für die Funktion w gilt eine partielle Differentialgleichung als Funktion von r, μ und Φ . Poisson hat als besondere Form von w die Funktion t/r angegeben, wobei t die Zeit darstellt. Verf. versucht nun für w eine Lösung, welche eine unendliche Reihe enthält, deren Glieder das Produkt einer ganzzahligen Potenz von t und einer Funktion von r sind. Er gibt eine besondere Lösung zweiten Grades dieser Form an. Im zweiten Teil der Arbeit geht Verf. davon aus, daß die Wellengleichung in Polarkoordinaten Lösungen hat, welche das Produkt zweier Legendreschen Funktionen und einer Exponentialfunktion sind. Er findet als Partikularlösung der Wellengleichung einen Ausdruck mit einem Tchebycheffschen Polynom und entwickelt diese Partikularlösung nach den genannten Legendreschen Polynomen, wobei die Entwicklungskoeffizienten unmittelbar durch Vergleich hervorgehen. Hieraus ergibt sich eine bestimmte Integralformel, deren Integrand das Produkt einer Legendreschen Funktion und einer Hyperbelfunktion enthält.
M. J. O. Strutt (Eindhoven).

Kupradze, V. D.: Lösung der allgemeinen Aufgabe der Diffraktion von elektromagnetischen Wellen. *Trav. Inst. Math. Tbilissi* 2, 143—158 u. dtsch. Zusammenfassung 158—162 (1937) [Russisch].

Es wird gezeigt, daß formell die allgemeine Beugungsaufgabe mit beliebiger Form des Beugungsobjektes durch eine belastete vektorielle Integralgleichung vom Fredholm'schen Typus gelöst werden kann. Diese Gleichung basiert auf der Greenschen Funktion der Wellengleichung, wobei das Beugungsobjekt Strahlungsquelle mit im Unendlichen verschwindenden Strahlungsfelde gemacht wird. Im Falle verschwindenden Objektes verschwindet auch die Ausstrahlung, und die Überlagerung der einfallenden und ausgestrahlten Wellen befriedigt alle Randbedingungen. Zur Durchführung der Lösung in bestimmten Fällen muß zunächst eine Fredholmsche Integralgleichung zweiter Art gelöst werden.
Ernst Weber (New York).

Sakurai, Tokio: A new operational method in mathematical physics. *Tôhoku Math. J.* 44, 39—80 (1937).

Funktionentheorie:

Federighi, Urbano: Sul teorema fondamentale di Cauchy per le funzioni analitiche. Ist. Lombardo, Rend., III. s. **71**, 186—192 (1938).

L'aut. démontre le théorème de Cauchy sous la forme suivante: Soit, dans le plan de la variable complexe z , un domaine T d'ordre de connexion fini, limité par une ou plusieurs courbes continues fermées et rectifiables, C , et soit $f(z)$ une fonction dérivable et bornée à l'intérieur de T . On a $\int_C f(z) dz = 0$, l'intégrale étant prise au

sens de Lebesgue; $f(z)$ est la limite, qui existe presque partout, des valeurs de $f(z')$ lorsque z' intérieur à T tend vers z de C sur un arc simple de Jordan intérieur à C et qui n'est pas tangent au contour. La démonstration repose sur les propriétés de la représentation conforme sur un cercle d'un domaine simplement connexe à frontière rectifiable, et sur le théorème de Fatou sur l'existence des valeurs limites au contour d'une fonction holomorphe et bornée dans un cercle. G. Valiron (Paris).

Szőkefalvi Nagy, Gyula v.: Über die nichtreellen Nullstellen der reellen ganzen Funktionen von endlichem Geschlecht. Mat. természett. Értes. **56**, Tl 2, 353—372 u. dtsh. Zusammenfassung 373—375 (1937) [Ungarisch].

The author gives an extension of his previous results corresponding to $p = 1$ [Mat. természett. Értes. **50**, 167 (1933); this Zbl. **9**, 215] to an arbitrary odd genus $p = 2s - 1$. Let $f(z)$ be a real integral function of genus p , $F(z) = e^{-\gamma z^{p+1}} f(z)$, $\gamma \geq 0$. Let $z_\nu = a + ib_\nu$ ($\nu = 1, 2, \dots, s$) be a set of complex numbers, $b_\nu > 0$, and

$$K(z_1, z_2, \dots, z_s) = \sum_{\nu=1}^s \{b_\nu(b_1^2 - b_s^2)(b_2^2 - b_s^2) \dots (b_s^2 - b_s^2)\}^{-1} \cdot \Im \left\{ \frac{F'}{F} (a + ib_\nu) \right\}.$$

If $K > 0$ or $K < 0$ but $K + (p + 1)\gamma > 0$, a certain domain in the complex z -plane can be determined in which $f(z)$ has at least one complex zero. The boundary of this domain is an algebraic curve passing through the points z_ν and \bar{z}_ν . G. Szegő.

Morant, J.: Sur certains développements de fonctions holomorphes dans une aire limitée par des arcs de cercle. Bull. Soc. Roy. Sci. Liège **7**, 159—164 (1938).

Ist $f(z)$ eine in dem Kreis C mit dem Mittelpunkt a analytische Funktion und ist $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ mit $a_n \rightarrow a$ eine Folge verschiedener Punkte aus dem Innern von C , so folgt aus der Cauchyschen Integralformel unmittelbar, daß sich $f(z)$ in C durch die Reihe

$$f(z) = f(a_1) + (z - a_1) \left[\frac{f'(a_1)}{\Phi_2'(a_1)} + \frac{f(a_2)}{\Phi_3'(a_2)} \right] + \\ \dots + (z - a_1)(z - a_2) \dots (z - a_{n-1}) \left[\frac{f(a_1)}{\Phi_n'(a_1)} + \frac{f(a_2)}{\Phi_n'(a_2)} + \dots + \frac{f(a_n)}{\Phi_n'(a_n)} \right] + \dots$$

mit

$$\Phi_n(z) = (z - a_1)(z - a_2) \dots (z - a_n)$$

darstellen läßt [H. Laurent, J. Math. pures appl. (5) **8**, 309—328 (1902)]. — In der vorliegenden Note wird auf demselben Wege die entsprechende Darstellung für eine Funktion $f(z)$ gegeben, die in einem von endlich vielen Kreisbögen begrenzten Gebiet analytisch ist. Hieraus folgt noch eine Produktdarstellung von $f(z)$, falls $f(z)$ in dem Gebiet nicht verschwindet. F. Lösch (Berlin-Adlershof).

Leja, F.: Sur une suite de polynômes et la représentation conforme d'un domaine plan quelconque sur le cercle. Ann. Soc. Polon. math. **14**, 116—134 (1936).

Let D be a connected domain with $z = \infty$ as interior point, and let F be the boundary of D . Let $\eta_0, \eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n$ be a set of points for which $\prod |z_\nu - z_\mu|$, $z_\nu \in F$, is a maximum, and let

$$\min \{ |\eta_j - \eta_0| |\eta_j - \eta_1| \dots |\eta_j - \eta_n| \}, \quad j = 0, 1, \dots, n$$

be attained for $j = 0$. The author is interested in the sequence of polynomials

$$L_n(z) = \frac{(z - \eta_1) \dots (z - \eta_n)}{(\eta_0 - \eta_1) \dots (\eta_0 - \eta_n)}.$$

In a previous paper [Ann. Soc. Polon. math. 12, 57 (1934); this Zbl. 10, 201] he proved the existence of $\lim_{n \rightarrow \infty} |L_n(z)|^{1/n}$, $z \in D$, and discussed the relation of this limit to the Green function of D . The present paper shows the existence of $l(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\overline{L_n(z)} e^{i\theta_n}}$, $z \in D$, where the real numbers θ_n are properly determined. The function $l(z)$ is analytic and $w = l(z)$ is a conformal representation of the domain D to the circle $|w| > 1$. If D is simply connected, $l(z)$ is schlicht. G. Szegő (St. Louis, Mo.)

Denjoy, Arnaud: Sur les singularités des fonctions analytiques des fonctions définies par un élément. C. R. Acad. Sci., Paris 206, 1073—1076 (1938).

L'aut. poursuit ses recherches sur les relations entre les singularités du prolongement radial de la série de Taylor $g(z) = \sum a_n z^{-n}$ et les propriétés de croissance du module de la fonction entière associée $F(v) = \sum a_{n+1} \frac{v^n}{n!}$ (voir ce Zbl. 18, 140). Mais il porte ici davantage son attention sur les propriétés de $F(v)$. Dans un intervalle où l'indicatrice $p(\theta)$ est sinusoïdale, on peut choisir ζ pour que $e^{-\zeta v} F(v)$ ait son indicatrice nulle. Si la singularité ζ de $g(z)$ est isolée, on peut alors, moyennant une hypothèse sur sa partie principale, séparer dans $e^{-\zeta v} F(v)$ les termes correspondant à cette partie et inversement. Ceci conduit à une méthode générale d'investigation des singularités de $g(z)$ à partir des propriétés asymptotiques de $F(v)$. [Note du Réf. On peut rapprocher ces recherches de celles provoquées par l'étude des directions de Julia et de Borel des fonctions entières $F(v)$ (Travaux notamment de V. Bernstein et de Miss Cartwright; voir Mém. Sci. math., Fasc. 89; ce Zbl. 18, 73); mais les points de vue sont opposés, dans l'un des cas, on cherche les propriétés de $F(v)$ à partir des singularités de $g(z)$; dans l'autre (A. Denjoy) on cherche plutôt à prolonger $g(z)$ à partir des propriétés de $F(v)$.] G. Valiron (Paris).

Roger, Frédéric: Sur l'indétermination des fonctions analytiques en leurs points singuliers. C. R. Acad. Sci., Paris 206, 1276—1278 (1938).

Un point singulier a d'une fonction analytique F est appelé angulairement accessible d'une branche de F , lorsque a est un sommet d'un secteur circulaire dont les points intérieurs sont tous réguliers pour la branche considérée. Un tel point est dit point d'indétermination complète, point d'indétermination incomplète ou point de continuité, suivant que les valeurs limites de la branche dans le point considéré recouvrent le plan tout entier, une partie seulement du plan ou se réduisent à un point. M. Roger énonce quelques théorèmes qui sont des conséquences immédiates des résultats concernant des propriétés tangentielles des ensembles de points, établis par l'auteur dans sa Thèse [Roger, Acta math. 69, 99—133 (1937), voir ce Zbl. 18, 250; cf. aussi Kolmogoroff et Verčenko, C. R. Acad. Sci. URSS 1, 105—107 (1934); 4, 361—364 (1934), ce Zbl. 8, 343 et 11, 107; Haslam-Jones, Quart. J. Math., Oxford Ser. 7, 116—123 (1936), ce Zbl. 14, 107; Saks, Theory of the integral, 2nd ed. (Monografie Matematyczne), 1937, 264—268, ce Zbl. 17, 300]. Citons à titre d'exemple: Les points singuliers d'une fonction analytique, angulairement accessibles pour au moins une branche pour laquelle ils sont singuliers, se répartissent sur au plus une infinité dénombrable d'arcs simples rectifiables. Il s'en suit à l'aide du théorème de Fatou (au moyen d'une transformation conforme) que les points singuliers pour au moins une branche d'une fonction analytique, qui sont points d'indétermination incomplète pour cette branche dans un angle d'accessibilité, forment un ensemble de longueur nulle. Saks (Warszawa).

Littlewood, J. E.: On the coefficients of schlicht functions. Quart. J. Math. Oxford Ser. 9, 14—20 (1938).

Let $f(z)$ be regular and schlicht for $|z| < 1$, and

$$f(z) = z + c_{k+1} z^{k+1} + c_{2k+1} z^{2k+1} + \dots$$

Littlewood, Littlewood-Paley, and Levine proved that for $k=1, 2, 3$, respectively, the inequalities $|c_n| < A n^{-1+2/k}$ hold where A depends on k . The author

shows that the corresponding general theorem which might be expected, is wrong, even for the set of the uniformly bounded functions. His Gegenbeispiel is (k sufficiently large)

$$f(z) = \int_0^s \prod_{m=1}^{\infty} \Phi(z^{k^m}) dz, \quad \Phi(z) = (1 + z/3)(1 - z/3)^{-3},$$

which is of the form required, continuous for $|z| \leq 1$, and $\max |f(z)|$, $|z| \leq 1$, is uniformly bounded in k . Moreover $c_n > 0$ and $c_n > A n^{-1+a/\log k}$ holds for an infinite number of values of n ; here $a > 0$ is an absolute constant and $A > 0$ depends only on k .

G. Szegő (St. Louis, Mo.).

Dinghas, Alexander: Über das Phragmén-Lindelöfsche Prinzip und den Julia-Carathéodoryschen Satz. S.-B. preuß. Akad. Wiss. 1938, 32—48.

Wenn $f(z)$ in der Halbebene $\Re z > 0$ regulär und in jedem endlichen Punkt der imaginären Achse beschränkt ist ($|f| \leq 1$), so gilt als Erweiterung eines klassischen Prinzips von Phragmén-Lindelöf, daß der Mittelwert $m(r)$ von $\log |f(re^{i\varphi})| \cos \varphi$ auf dem Halbkreisbogen $|z| = r$, $|\varphi| \leq \frac{\pi}{2}$ für $r \rightarrow \infty$ ins Unendliche wächst, so daß $\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{m(r)}{r} = c > 0$, es sei denn, daß $|f| \leq 1$ in der ganzen Halbebene gilt. Dieser Satz von Ahlfors (dies. Zbl. 16, 32) wird hier aus der Poissonschen Darstellung von $\log f(z)$ im Halbkreis $\Re z > 0$, $|z| \leq \varrho$ durch den Grenzübergang $\varrho \rightarrow \infty$ gewonnen.

Rolf Nevanlinna (Helsinki).

Ahlfors, Lars V.: Geometrie der Riemannschen Flächen. (Oslo, 14.—18. VII. 1936.) C. R. congr. int. Math. 1, 239—248 (1937).

Verf. entwickelt in dem Vortrag die Hauptgedanken seiner beiden großen Arbeiten, in denen er durch eine Theorie der Überlagerungsflächen die funktionentheoretische Behandlung der Wertverteilung analytischer Funktionen durch topologische und differentialgeometrische Elemente ganz von den erzeugten Riemannschen Flächen her erfaßt. Wir verweisen auf unsere Referate über diese Arbeiten (dies. Zbl. 12, 172f. und 17, 36f.).

Ullrich (Gießen).

Bergmann, Stefan: Zur Theorie der Funktionen, die eine lineare partielle Differentialgleichung befriedigen. I. Rec. math. Moscou, N. s. 2, 1169—1197 (1937).

Verf. benutzt die in seiner Arbeit „Über Kurvenintegrale von Funktionen zweier komplexen Veränderlichen, die die Differentialgleichung $\Delta v + v = 0$ befriedigen“, verwandten Methoden zur Behandlung der Lösungen von

$$L(U) = \frac{\partial^2 U}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial x_2^2} + A(x_1, x_2) \frac{\partial U}{\partial x_1} + B(x_1, x_2) \frac{\partial U}{\partial x_2} + C(x_1, x_2) U = 0;$$

x_1, x_2 reelle Veränderliche, $A(z_1, z_2)$, $B(z_1, z_2)$, $C(z_1, z_2)$ analytische Funktionen der beiden komplexen Veränderlichen z_1, z_2 ; $z_k = x_k + iy_k$, $k = 1, 2$. S. dies. Zbl. 16, 408 und 18, 30.

Behnke (Münster i. W.).

Bergmann, Stefan: Über einige Abschätzungen bei pseudokonformen Abbildungen. C. R. Acad. Sci. URSS, N. s. 16, 11—14 (1937).

In the theory of analytic functions of two complex variables invariant line area and volume elements can be introduced in regions by means of the “Kernfunktion” of the region. The present paper discusses some extensions of Schwarz lemma for these elements and applies these results to analytic transformations $w_k = w_k(z_1, z_2)$ ($k = 1, 2$) which omit the six planes $w_k = 0, 1, \infty$, obtaining estimates in terms of the modul function.

F. Bohnenblust (Princeton, N. J.).

Vignaux, J. C.: Einige Fundamentalformeln über polygene Funktionen einer oder mehrerer Variablen. An. Soc. Ci. Argent. 125, 19—29 (1938) [Spanisch].

Kakutani, Shizuo: On the family of pseudo-regular functions. Tôhoku Math. J. 44, 211—215 (1937).

Pseudo-regular functions are transformations in the complex plane with a positive Jacobian, except at isolated points. The main theorem is that all linear combinations

of pseudo-regular functions $f(z)$ and $g(z)$ are again pseudo-regular, only if $f(z)$ is an analytic function of $g(z)$. There is a generalization to the case where differentiability is not assumed.
Ahlfors (Cambridge, Mass.).

Wahrscheinlichkeitsrechnung, Statistik und Anwendungen.

Reichenbach, H.: Les fondements logiques du calcul des probabilités. Ann. Inst. H. Poincaré 7, 267—348 (1937).

In diesen Vorträgen legt Verf. eine Lösung des sog. erkenntnistheoretischen Problems der Wahrscheinlichkeitsrechnung dar, die er bereits in Abhandlungen und in Buchform publiziert hat. Ausführliches Referat seiner Axiomatik findet man in dies. Zbl. 3, 354f.; der Wahrscheinlichkeitslogik in 6, 67; der allgemeinen Theorie in 10, 364f. (vgl. auch 7, 252). — Die hier gegebenen Axiome unterscheiden sich von den in 3, 354 referierten durch Fortlassung der Umkehraxiome III 2 und IV 2—3. Die Bemerkung des Ref., daß die Wahrscheinlichkeiten des „Entweder-Oder“ u. dgl. in dieser Axiomatik gar nicht zu existieren brauchen, wird jetzt durch die außerhalb der Axiome stehende „Existenzregel“ behoben: „Wenn eine unbekannte Wahrscheinlichkeit durch gegebene Wahrscheinlichkeiten eindeutig bestimmt ist, so existiert sie.“ — Ausführlich wird die innere Struktur der Wahrscheinlichkeitsfolgen (Kollektivs) studiert, „so wie der Botaniker eine Pflanze studiert“, d. h. die Folgen werden je nach dem Verhalten der Teilfolgen klassifiziert. Die Begriffsbildungen werden sodann auf geometrische Wahrscheinlichkeiten und stetige Wahrscheinlichkeitsfolgen übertragen. Ausführlich geht Verf. auf das Anwendungsproblem ein, wobei er die erkenntnistheoretischen Fragen durch die Wahrscheinlichkeitslogik und die allgemeine Induktion gelöst zu haben glaubt. Nach Ansicht des Verf. gehören alle geläufigen Wahrscheinlichkeitsaussagen der Umgangssprache mit zur Theorie, und die Brücke wird gebildet durch den „Satz von der Allmacht der Häufigkeitsdeutung“; wenn ein Historiker sage, daß Cäsar wahrscheinlich in der Bretagne gewesen sei, so sei dieses eine Aussage über die Häufigkeit des Eintreffens ähnlich begründeter Urteile.
W. Feller (Stockholm).

Berge, P. O.: A note on a form of Tchebycheff's theorem for two variables. Biometrika 29, 405—406 (1938).

Whatever be two random variables x and y with their first moments equal to zero, with their standard deviations σ_1 and σ_2 and the coefficient of correlation r , the probability of the simultaneous occurrence of the inequalities $|x| > k\sigma_1$ and $|y| > k\sigma_2$ cannot exceed the limit $(1 + \sqrt{1-r^2})k^{-2}$. An example shows that without the knowledge of higher moments of x and y , the above limit could not be lowered.

J. Neyman (London).

Misès, R. de: Sur une inégalité pour les moments d'une distribution quasi-convexe. Bull. Sci. math., II. s. 62, 68—71 (1938).

Es sei $V(x)$ eine Verteilungsfunktion mit 1. $V(x) = 0$ für $x < 0$; 2. für irgend ein $r > 0$ existiert das Moment M_r ; 3. es gibt drei Punkte $0 < x_0 < x_1 < z$ derart, daß $V(x)$ in $x_0 < x < x_1$ ganz unterhalb der Geraden verläuft, die $(x_1, V(x_1))$ mit $(z, 1)$ verbindet. Verf. gibt einen einfachen Beweis der folgenden von Fréchet (in dem in dies. Zbl. 15, 260 ref. Buche) gefundenen Abschätzungen: Wenn die Wurzel ζ von $\zeta^{\tau+1} - x_0^{\tau+1} = (r+1)\zeta(\zeta - x_1)$ größer ist als x_0 , so ist $1 - V(x_1) \leq M_r/\zeta^\tau$. Andernfalls hat man $1 - V(x_1) \leq (\zeta - x_1)/(\zeta - x_0)$, wo nun ζ die Wurzel von $\zeta^{\tau+1} - x_0^{\tau+1} = (r+1)M_r(\zeta - x_0)$ ist.
W. Feller (Stockholm).

Lévy, Paul: Sur la définition des lois de probabilité par leurs projections. C. R. Acad. Sci., Paris 206, 1240—1242 (1938).

Lévy, Paul: Rectification à une note antérieure. C. R. Acad. Sci., Paris 206, 1699 (1938).

Ohne Beweis werden folgende Sätze angegeben: 1. Damit drei Verteilungsfunktionen $F_1(y, z)$, $F_2(z, x)$, $F_3(x, y)$ als „Projektionen“ einer Verteilungsfunktion $F(x, y, z)$

aufgefaßt werden können, ist notwendig, daß für je zwei Intervalle e_2 und e_3

$$\int_{e_1} dy \int_{e_2} dz F_1(y, z) \leq \int_{-\infty}^{+\infty} \text{Min} \left\{ d_x \int_{e_2} dz F_2(z, x), d_x \int_{e_3} dy F_2(x, y) \right\}$$

sowie die beiden hierzu symmetrischen Ungleichungen erfüllt sind. — 2. Es seien x_i , $i = 1, 2, 3$ stochastische Veränderliche mit $E\{x_i\} = 0$, $E\{x_i^2\} = 1$ und $E\{x_i x_j\} = \cos \varphi_{ij}$. Dann ist $\varphi_{ik} \leq \varphi_{ij} + \varphi_{jk}$. Wenn umgekehrt diese Relation erfüllt ist, so sind $r_{ij} = \cos \varphi_{ij}$ die Korrelationskoeffizienten dreier normierter stochastischer Veränderlichen. — Übertragung auf mehr Dimensionen. *W. Feller (Stockholm).*

Halphen, Étienne: Recherche des variables aléatoires les plus indépendantes. C. R. Acad. Sci., Paris **206**, 804—806 (1938).

Given a probability distribution with a density function $f(x, y, \dots)$ set $\Gamma_{x, y, \dots} = \int \dots \int f \log f dx dy \dots$. Let $f(x, y)$ be a two-dimensional density function, and let $\varphi(x)$, $\psi(y)$, be the corresponding density of distribution of $x(y)$. I. For given $\varphi(x)$, $\psi(y)$, the density $f(x, y)$ making $\Gamma_{x, y}$ a minimum is that for which x, y are independently distributed: $f(x, y) = \varphi(x) \cdot \psi(y)$. [This fact, which follows from the integral inequality $\frac{1}{mE} \int \log \alpha dx \leq \log \frac{1}{mE} \int \alpha dx$ is stated somewhat less generally

by the author.] For this minimizing function, $f(x, y)$, $\Gamma_{x, y} = \Gamma_x + \Gamma_y$, so that $\Gamma_{x, y} - \Gamma_x - \Gamma_y = \delta$ furnishes a measure of stochastic independence. II. A change of variables from (x, y) to (u, v) which is area preserving may change δ , which is at its minimum with respect to such a change if and only if $f(x, y)$ depends only on $\varphi(x) \cdot \psi(y)$: $f = F(\varphi(x) \cdot \psi(y))$. A proof of II is sketched, along variational principles.

J. L. Doob (Urbana).

Birkhoff, Garrett: Dependent probabilities and spaces (L). Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. **24**, 154—159 (1938).

Verf. formuliert allgemeine Ergodensätze, die im deterministischen Falle den v. Neumannschen Ergodensatz, und im stochastischen Fall den Markoffschen Satz über die Konvergenz der Wahrscheinlichkeiten bei einer Markoffschen Kette als Spezialfälle enthalten. Als wesentliches Hilfsmittel für die Formulierung der Sätze tritt die Theorie der teilweise geordneten linearen Vektorräume auf. Beweise werden angedeutet.

E. Hopf (Leipzig).

Elfving, Gustav: Über die Interpolation von Markoffschen Ketten. Soc. Sci. Fennica. Comment. phys.-math. **10**, Nr 3, 1—8 (1938).

Suite de recherches précédentes (ce Zbl. **17**, 316). Soit S un système pouvant prendre les états E_1, E_2, \dots, E_n , la probabilité de passer de l'état E_i à l'instant s à l'état E_k à l'instant t étant $p_{ik}(s, t)$ ($s \leq t$), $p_{ik}(s, t)$ étant dérivable avec $p_{ik}(s, s+0) = \delta_{ik}$. L'auteur traite le problème suivant: La matrice $\{p_{ik}\}$ d'une chaîne de Markoff étant donnée, existe-t-il des $p_{ik}(s, t)$ tels que $p_{ik} = p_{ik}(0, 1)$. L'auteur examine plusieurs cas particuliers pour lesquels il montre que si de tels $p_{ik}(s, t)$ existent, il en est qui ont la forme $p_{ik}(s, t) = \varphi_{ik}(t - s)$. On peut consulter dans le même ordre d'idées l'article de Doeblin, Sur l'équation matricielle $A^{(t+s)} = [A^{(t)} A^{(s)}] \dots$ [Bull. Sci. math., II. s. **62** (1938)].

Ville (Paris).

Geiringer, Hilda: Sur les variables aléatoires arbitrairement liées. Rev. math. Union Interbalkan. **2**, 1—26 (1938).

Denote by E_1, E_2, \dots, E_n , n possible, not necessarily exclusive, results of a random experiment and by $p_{ij \dots k}$ the probability of the simultaneous occurrence of E_i, E_j, \dots, E_k . Let further $P_n(x)$ for $x = 0, 1, \dots, n$ denote the probability that the random experiment will bring about exactly x of the n events E_1, E_2, \dots, E_n . Finally let S_1 be the sum of all p_i , S_2 that of all p_{ij} , etc. The author considers the relationship between $P_n(x)$ and the sums S_k which was already studied by R. v. Mises [Z. angew. Math. Mech. **1**, 298—307 (1921)] and by Ch. Jordan (see this Zbl. **10**, 173).

Using the fact that the k 'th factorial moment of $P_n(x)$ is equal to S_k divided by $k!$, the author gives elegant methods of proving that, in certain cases, the distribution $P_n(x)$ tends to the Poisson Law of frequency or to the normal one, as $n \rightarrow \infty$. The method is applied to a number of interesting particular cases. *J. Neyman* (London).

Haba, J.: Sur les probabilités des évènements dépendants. Publ. Fac. Sci. Univ. Charles Prague Nr 154, 21—24 (1937).

Anschließend an das Pólya-Eggenbergersche Urnenschema wird eine Urne mit R roten und S schwarzen Kugeln betrachtet; nach jeder Ziehung werden $1 + \Delta$ Kugeln der Farbe der gezogenen in die Urne gelegt. Es sei r die Gesamtzahl der in n Ziehungen gezogenen Kugeln, $\rho = R/(R+S)$, $\sigma = S/(R+S)$, $\delta = \Delta/(R+S)$. Wenn dann $\rho > 0$ und $n\delta = d > 0$ festgehalten werden, so strebt für $n \rightarrow \infty$ die Frequenzfunktion von

$x = (r - n\rho)/\sqrt{n\rho\sigma}$ gegen $e^{-\frac{x^2}{2(1+d)}}/\sqrt{2\pi(1+d)}$. Bei festem $\rho > 0$, $\delta > 0$ diejenige

von $x = r/n$ gegen konst. $x^{\frac{\rho}{\sigma}-1}(1-x)^{\frac{\sigma}{\rho}-1}$. Schließlich für $n^{\theta}\delta = d > 0$, $n^{\theta}\rho = h = \alpha d > 0$ mit $0 < \theta < 1/2$ diejenige von $x = rn/\delta$ gegen $x^{\alpha-1}e^{-x}/\Gamma(\alpha)$. — Ähnliche Resultate werden für einfache Markoffsche Ketten mit zwei Zuständen ausgesprochen. *Feller*.

Benford, Frank: The law of anomalous numbers. Proc. Amer. Philos. Soc. 78, 551—572 (1938).

Eine Statistik von im Alltagsleben vorkommenden Zahlen (etwa aus Zeitungen unter Fortlassung von Seiten- und Datumszahlen, Adressen, Statistiken u. dgl.) zeigt, daß in vielen Fällen die relativen Häufigkeiten der Ziffern $a = 1, \dots, 9$ (bei Nichtbeachtung der Null) mit überraschender Näherung durch $\log \frac{a+1}{a}$ gegeben sind. Zur Erklärung des Phänomens kann man die Frequenz $f_a(n)$ der Ziffer a unter den n ersten natürlichen Zahlen graphisch darstellen. Während $f_9(n)$ stets $\leq 1/9$ ist, wird $f_1(2 \cdot 10^k) \approx 1/2$ usf. Der von diesen Kurven begrenzte Flächeninhalt ist für große n angenähert $\log \frac{a+1}{a}$. Grob gesprochen stellt sich also diese Verteilung der Ziffern ein, wenn „alle Zahlen gleich wahrscheinlich“ sind. Viele Beispiele. *W. Feller*.

● **Neyman, J.:** Lectures and conferences on mathematical statistics. Revised and supplemented by W. Edwards Deming. Washington: Graduate School of the U. S. Dep. of Agricult. 1938. 163 pag. \$ 1.25.

Den Ausgangspunkt für alle Probleme des Verf. bilden konkrete praktische Aufgaben, und die Anwendungen rücken niemals aus dem Blickpunkt. Andererseits bleibt eine wirklich strenge mathematische Theorie stets das Ziel. Eine absolute Begriffsklarheit und Strenge scheinen dem Verf. offenbar nicht nur eine Konzession für die Sicherheit, sondern auch positiv nützlich und nötig, gerade an den Punkten, wo die praktischen Probleme die Grenzen der Mathematik überschreiten. Eine solche Einstellung und die lebendige Verknüpfung von Theorie und Praxis machen sich in einer solchen Vortragsreihe besonders geltend, da hier die leitenden Gesichtspunkte und die methodologischen Probleme mehr in den Vordergrund treten. Besonders erfreulich ist die Klarlegung der Grenzen zwischen rein mathematischen Schemata und allgemeinen Konventionen. Die einzelnen Vorträge behandeln (in sehr klarer Darstellung) nur sehr lose zusammenhängende Gegenstände, und auch die Anforderungen an den Leser sind nicht ganz gleichmäßig. Z. T. handelt es sich jedoch um Kapitel, die in der gegenwärtigen Literatur besonders schwer zugänglich und doch von größter Bedeutung sind. Das Buch wird daher mit Vorteil auch zur ersten Orientierung benutzt werden können. — Die Vorlesungen bringen zunächst einen knappen Abriss der modernen Wahrscheinlichkeitsrechnung mit den additiven Mengenfunktionen als Ausgangspunkt. Das ist wichtig, weil der Neyman-E. S. Pearsonsche Gedankenkreis über die Prüfung statistischer Hypothesen und statistische Schätzungen (dies. Zbl. 14, 321 u. 357; 17, 124) wesentlich auf dieser Auffassung beruht. Weiter wird das Problem behandelt, wie ein fertiges mathematisches Schema mit der Erfahrung zu konfrontieren ist. Hochinteressant ist die Vorlesung über die Prüfung statistischer Hypothesen, wo nicht nur eine Einführung in die erwähnte Theorie gegeben wird, sondern auch eine sehr lehrreiche Kritik verschiedener Prinzipien, die zur Konstruktion von Kriterien (Tests) vorgeschlagen wurden. Es folgen die „conferences“ — zunächst über das vielumstrittene Problem der Anordnung von landwirtschaftlichen Experimenten, sodann über eine neue Behandlung eines speziellen Problems, das sich auf den Zuckerrübenbau bezieht. Sodann eine Diskussion vor allem über die zweckmäßige Anordnung statistischer

Erhebungen und weiter eine Kritik der nationalökonomischen Methoden zur Untersuchung von Zeitreihen. Die beiden letzten Vorträge geben eine klare Einführung in die Theorie des Verf. über statistische Schätzungen (vgl. dies. Zbl. 17, 124f.). — Die Ausarbeitung hat den lebendigen Vortragsstil beibehalten und manche gestellte Diskussionsfrage mit eingearbeitet. Obwohl es sich um vervielfältigte „mimeographierte“ Schreibmaschinenschrift handelt, ist der Druck sehr übersichtlich und klar. *W. Feller* (Stockholm).

Koeppler, Hans: Die Anwendung der Theorie der Elementarwahrscheinlichkeit zweier Abweichungen auf die Darstellung der Differentialgleichung der Frequenzfunktion zweier Variablen. *Aktuár. Vědy* 7, 72—85 (1938).

Ersetzt man (mit Bachelier) die Anzahl der Messungen durch eine kontinuierliche „Zeit“ t , so genügt die Wahrscheinlichkeitsdichte für die Abweichungen (x, y) bekanntlich der fundamentalen Funktionalgleichung von Chapman-Smoluchowski. Die zugehörige Fokker-Plancksche Differentialgleichung wird parabolisch mit konstanten Koeffizienten. Verf. ist die moderne, an Kolmogoroff anschließende Theorie entgangen, und er leitet daher diese Gleichung neu ab, jedoch ohne die hierzu notwendigen Bedingungen zu haben (vgl. auch dies. Zbl. 7, 22). Anschließend wird der klassische Ausgangspunkt der Diffusionstheorie bestätigt, daß nämlich die Gaußsche Verteilung tatsächlich eine Lösung ist. Übergang zu Polarkoordinaten u. dgl. *Feller*.

Dor, Léopold: Introduction à la méthode de C.-V.-L. Charlier. *Bull. Soc. Roy. Sci. Liège* 7, 164—171 (1938).

Mit Hilfe der charakteristischen Funktionen werden aus einfachen Urnenschemata die Charlierschen Reihen der Typen A und B hergeleitet. Diskussion ihrer inhaltlichen Interpretation. *W. Feller* (Stockholm).

Fertig, John W., and Elizabeth A. Proehl: A test of a sample variance based on both tail ends of the distribution. *Ann. math. Statist.* 8, 193—205 (1937).

In testing the hypothesis that an observed sample of given size N , has been drawn from a normal population for which the standard deviation has a given value, one may form familiar ratios v or v' according as the population mean is known or unknown. The probability of obtaining a larger (or smaller) value of v or v' than that observed may be readily obtained from that of the appropriate tail area of the Chi-square distribution with N or $N - 1$ degrees of freedom respectively. The author adopts the method of approach developed by J. Neyman and E. S. Pearson in numerous papers appearing during the current decade. In the case of a “simple” hypothesis concerning population variance (one which specifies completely the elementary probability law of the sample), the authors obtain under reasonable assumptions a table of the probability that a sample has been drawn from a normal population with a specified variance in terms of n the number of degrees of freedom. For convenience in place of $x = v/N$ itself, the table uses k , where $e^x/x = 10^k$. A discussion is also made of the bias for different choices of a best critical region in the case of a “composite” hypothesis concerning population variance. *Albert A. Bennett*.

Cisbani, Renzo: Contributi alla teoria delle medie. *Metron* 13, Nr 2, 23—59 (1938).

The paper is composed of two parts dealing with generalizations of the concepts of an average and of a median respectively. The average is being defined for a continuous set of numbers filling up an interval (a, b) , with $0 < a < b$, and in relation to two indices x and j . Divide the interval (a, b) in n parts, the abscissa of the k 'th point of subdivision being $t_k = (a^j + kh)^{\frac{1}{j}}$ with h so chosen that $t_n = b$. Assuming x and j

being different from zero, the author considers $y_j(x) = \{r^{-1} \sum t_k^x\}^{\frac{1}{x}}$ and defines the generalized average as the limit of $y_j(x)$ for $n \rightarrow \infty$. This definition is then extended to the case when $x = 0$ or $j = 0$ or both. In treating the problem of the median the author is concerned with the case where the ordinary definition is indeterminate and suggests a simplified method of solving the equation $\prod_{i=1}^k (x - a_i) = \prod_{i=k+1}^n (a_i - x)$ suggested by Jackson.

J. Neyman (London).

Jeffreys, Harold: The law of error and the combination of observations. *Philos. Trans. Roy. Soc. London A* 237, 231—271 (1938).

The author expresses the opinion that both the theoretical and empirical arguments in favour of the Gaussian Law of error are defective and discusses the ways of using certain Pearson Curves for purposes of combining observations. It is suggested that a number of discrepancies in astronomy and physics that have been accepted as systematic may turn out to be random if a proper method of statistical analysis is applied.

J. Neyman (London).

Constantinescu, J.: Les méthodes statistiques dans les recherches scientifiques, sociales ou économiques. *Bull. Math. Phys. École polytechn. Bucarest* 8, 80—97 (1937).

In unstrenger Weise wird über die elementarsten Grundbegriffe referiert: Wahrscheinlichkeitsverteilung, Gaußsche Kurve, Streuung, Mediane, wahrscheinlicher Fehler u. dgl. Als Anwendung einige Kurven aus dem rumänischen Telefonverkehr, die der Leser untersuchen möge.

W. Feller (Stockholm).

Geometrie.

● **Berzolari, L., G. Vivanti e D. Gigli:** Enciclopedia delle matematiche elementari. Vol. 2, Pt. 2. Milano: Ulrico Hoepli 1938. XII, 574 pag. L. 75.—

Das insgesamt auf 3 Bände zu je 2 Teilen berechnete Werk unterscheidet sich in zweierlei Hinsicht von der Enzyklopädie der Elementarmathematik von Weber und Wellstein: Erstens handelt es sich hier um ein Sammelwerk im Stil der großen Enzyklopädie. Die einzelnen Artikel sind in sich abgeschlossen und enthalten neben kurzen Berichten über die geschichtliche Entwicklung der betreffenden Gebiete eingehende und im allgemeinen leichtverständliche Darstellungen der Begriffsbildungen, Definitionen und Ergebnisse, nur selten ausführlichere Beweisskizzen. Hervorzuheben sind die zahlreichen Literaturhinweise, insbesondere auch auf die ältere und älteste Literatur sowie die Listen von Lehrbüchern. Zweitens wird der Begriff Elementarmathematik in sehr viel weiterem Sinne verstanden. Der behandelte Stoff umfaßt grob gesagt neben der Schulmathematik auch den größten Teil des Stoffes der Anfängervorlesungen an Universitäten. — Der vorliegende 2. Teil des Geometriebandes enthält folgende Artikel: *Togliatti*, Maxima und Minima; *Lazzeri*, Elementare Theorie der Schnitte des Kreiskegels und Kreiszylinders; *Burali-Forti*, Elemente der Vektorrechnung; *Segre*, Analytische Geometrie; *Togliatti*, Projektive Geometrie; *Comessati*, Darstellende Geometrie und Anwendungen; *Loria*, Spezielle Kurven und Flächen; *Fano*, Nichteuklidische und nichtarchimedische Geometrien; *Chisini*, Elementargeometrie und höhere Mathematik. — Zu dem Artikel über Maxima und Minima, der bis zu räumlichen isoperimetrischen und verwandten Problemen vordringt, ist zu bemerken, daß die neueren Untersuchungen auf diesem Gebiet bedauerlicherweise nur recht unvollständig berücksichtigt sind. So sind die elementaren Beweise der isoperimetrischen Ungleichung für die Ebene von *Lebesgue* und *Bonnesen* nicht erwähnt. Bei den isoperimetrischen Problemen für Polyeder gegebener Typen fehlt ein Hinweis auf die diesbez. Arbeit von *Steinitz* (vgl. auch *Goldberg*, dies. Zbl. 10, 410). Von den zahlreichen geometrischen Extremumaufgaben, die seit *Brunn* und *Minkowski* behandelt worden sind und die z. T. wegen des elementaren Charakters der Problemstellungen durchaus in den Rahmen des Artikels passen, ist nur eines erwähnt, nämlich die *Minkowskische* Ungleichung zwischen Oberfläche und Integral der mittleren Krümmung eines konvexen Körpers. Sie wird jedoch *Chisini* (1922) zugeschrieben. (Vgl. wegen der Zitate *Bonnesen-Fenchel*, Theorie der konvexen Körper. *Erg. Math.* 3, H. 1, insbes. §§ 10 u. 12. Berlin 1934.)

W. Fenchel (Kopenhagen).

Cesare, E. A. de: Relaciones von Ordnungscharakter bei den Fundamentalformen 1. Art. *An. Soc. Ci. Argent.* 124, 33—51 (1937) [Spanisch].

An axiomatic development of a "circular" order and sense relation (i. e., such as exists for points on a circle) for elements of a one-dimensional form is given. Linear order is defined in terms of circular order.

J. L. Dorroh (Marion).

Cesare, E. A. de: Einordnung der nichteuklidischen Metrik in die projektive Geometrie. *An. Soc. Ci. Argent.* 124, 82—104 (1937) [Spanisch].

Remarks on the nature of a deductive theory are directed toward the case of euclidean geometry. The independence of the parallel postulate of Euclid is demonstrated by description of an example of the hyperbolic plane and of an example

of the elliptic plane, both constructed through the aid of projective geometry. It is pointed out that the illustrated alternatives to the parallel postulate are the only ones consistent with the remaining euclidean axioms. *J. L. Dorroh (Marion).*

Finsler, Paul: Einige elementargeometrische Näherungskonstruktionen. *Comment. math. helv.* 10, 243—262 (1938).

Verf. entwickelt geometrische Näherungskonstruktionen mit Fehlerberechnungen bei Sichtung und teilweiser Neuangabe der im Schrifttum bekannten Annäherungen für: a) die Würfelverdopplung; b) die Konstruktion des regulären 7-, 9-, 11- und 13-Ecks; c) die Rektifikation und Quadratur des Kreises; d) die Winkeldrei- und - n -Teilung. In einem Anhang wird noch eine genaue Tangentenkonstruktion für Ellipsen angegeben, die für das praktische Zeichnen bequem ist. *Steck (München).*

Strubecker, Karl: Zur Geometrie der Korbbögen. Bemerkung zur Mitteilung von G. D. Sandel, [ZAMM 17 (1937) Seite 301—302]. *Z. angew. Math. Mech.* 18, 148—149 (1938).

Das Korbbogenproblem verlangt zwei Linienelemente einer Kurve durch zwei berührend aneinander schließende Kreisbögen zu verbinden. Verf. zeigt die (von d'Ocagne elementargeometrisch gegebene) Lösung mit Hilfe der zyklographischen Abbildung und mittels einer Abbildung der Linienelemente der Ebene auf die Raumpunkte. (Sandel, vgl. dies. Zbl. 17, 219.) *Eckhart (Wien).*

Fabrieus-Bjerre, Fr.: Über inkongruente Figuren, deren entsprechende Abstände gleich sind. *Mat. Tidsskr. A* 1938, 11—18 [Dänisch].

Zwei Figuren F und G sollen aus je zwei Kurven F_1, F_2 und G_1, G_2 bestehen. Die Punkte von F_1 und G_1 sollen einander eineindeutig entsprechen, ebenso die Punkte von F_2 und G_2 . Die in Rede stehenden Abstände sind die der Punkte von $F_1(G_1)$ von den Punkten von $F_2(G_2)$, und Abstände entsprechender Punkte heißen entsprechend. Es werden alle im Titel genannten Figurenpaare bestimmt. Es gibt drei verschiedene Typen, von denen zwei damit zusammenhängen, daß die beiden Scharen konfokaler Ellipsen und Hyperbeln die Ebene in krummlinige Rechtecke teilen, deren Diagonalen gleich lang sind. Im dritten Fall liegen F_1 und G_1 auf einer Geraden und fallen zusammen, während entsprechende Punkte von F_2 und G_2 entweder zusammenfallen oder zur Geraden symmetrisch liegen. *Lochs (Kennelbach).*

Budeanu, C.: Quelques considérations sur les espaces supérieurs. *Bull. Mat. Phys. Ecole polytechn. Bucarest* 8, 38—55 (1937).

Die Arbeit beschäftigt sich nach einigen einleitenden Bemerkungen über den Gebrauch mehrdimensionaler Räume in der Physik hauptsächlich mit der Einführung eines für die Anwendungen geeigneten Vektorproduktes zweier Vektoren (A_1, \dots, A_n) (B_1, \dots, B_n) . Die beiden Vektoren werden in 2 verschiedenen R_n gedeutet, so daß die Ebenen der Komponenten A_i, B_i aufeinander senkrecht stehen und in den Ebenen selbst die Vektorkomponenten den Winkel φ_i bilden. Der als Vektorprodukt ihnen zugeordnete Vektor liegt dann in einem R_{2n+2} und hat als Quadrat des absoluten Betrages $(A_1^2 + \dots + A_n^2)(B_1^2 + \dots + B_n^2) - (\sum A_i B_i \cos \varphi_i)^2$. Anwendungen finden diese Dinge dann auf die Elektrotechnik, wo es sich um das Produkt zweier Schwingungsfunktionen der Gestalt $\sum \sqrt{2} A_k \sin(k\omega t - a_k)$ handelt. *Burau (Hamburg).*

Analytische und algebraische Geometrie:

Haarbleicher, André: Sur les triangles de Poncelet. *C. R. Acad. Sci., Paris* 206, 1212—1215 (1938).

Unter Ponceletschen Dreiecken sind solche zu verstehen, die einem Kegelschnitte um- und einem zweiten eingeschrieben sind. Die angekündigten Sätze werden analytisch so gewonnen, daß der umschriebene Kegelschnitt durch Kollineation in einen Kreis verwandelt wird und dann Minimalkoordinaten verwendet werden, deren Handhabung der Verf. früher konsequent durchgeführt hat. Einige Sätze: Die Einhüllende der harmonischen Polaren eines Punktes bez. aller Dreiecke ist ein Kegelschnitt und dual.

Der Ort der Umkreismittelpunkte ist wieder ein Kegelschnitt, ebenso der Ort der Höhenschnittpunkte, dagegen liegen die In- und Ankreismittelpunkte auf einer Quartik u. a. m.

Eckhart (Wien).

Ramamurti, B., and C. N. Srinvasiengar: The lines of striction on a quadric. J. Indian Math. Soc., N. s. 3, 19—24 (1938).

Metrische Beschreibung der Striktionslinien der beiden Regelscharen eines einschaligen Hyperboloids (s. z. B. K. Rohn und L. Berzolari, Enzykl. d. math. Wiss., III C 9, Fußnote 390). Bestimmung der Punkte jener Linien, wo ihre Hauptnormalen mit der Normalen des Hyperboloids zusammenfallen. Besonderer Fall, wo jene Linien zwei Inflexionspunkte besitzen.

E. G. Togliatti (Genova).

Ramamurti, B.: On linear complexes of minimum rank containing all the tangents of a rational norm curve. J. Indian Math. Soc., N. s. 3, 34—40 (1938).

Eine rationale Kurve C^n des dreidimensionalen Raumes, deren Tangenten einem linearen Strahlenkomplex angehören, besitzt $2n - 6$ Inflexionspunkte (Satz von Picard). Verf. betrachtet die gegebene C^n als Projektion einer rationalen normalen Γ^n und bemerkt, daß der Satz von Picard, sobald $n > 5$ ist, nicht umkehrbar ist. Wie Verf. selbst sagt, ist diese Bemerkung nicht neu [F. Egan, Proc. Roy. Irish Acad. 29, 62 (1911); G. Gherardelli, Rend. Accad. Lincei (6) 11, 173—179 (1930)].

E. G. Togliatti (Genova).

Milne, William P.: The bicircular quintic curve. Proc. London Math. Soc., II. s. 44, 130—139 (1938).

Es gibt 120 Kreise, welche eine bizirkuläre Kurve fünfter Ordnung Γ dreimal berühren. Zwei Paare dieser Kreise heißen „kongruent“, wenn es eine bizirkuläre Kurve vierter Ordnung durch deren Berührungspunkte mit Γ gibt. Verf. stellt zwei beliebige dreifach berührende Kreise S_1 und S_2 durch die Endpunkte einer Strecke dar. Dann gibt es noch 27 Paare (S_3, S_4), die mit dem Paare (S_1, S_2) und auch gegenseitig kongruent sind. Mit den 28 (kongruenten) Strecken, die man so bekommt, können 6 kongruente Rechtecke konstruiert werden derart, daß zwei Kreispaaire kongruent sind, wenn sie dargestellt werden durch Punkte auf parallelen Seiten oder auf Diagonalen zweier Rechtecke. Zwei dieser Rechtecke können immer zu einem „Kongruenzparallelepipedon“ vereinigt werden derart, daß zwei Kreispaaire kongruent sind, wenn sie dargestellt werden durch Punkte auf zwei parallelen Kanten oder auf zwei Diagonalen paralleler Seitenflächen oder auf zwei Körperdiagonalen. Verf. beweist, daß S_1, S_2, S_3, S_4 von einem Kreise S berührt werden. Auch betrachtet er die Kreise S_{ij} durch die Berührungspunkte von S und P_{ij} mit S_i, S_j , wenn P_{ij} eine gemeinsame Tangente der Kreise S_i, S_j ist, die denselben Ähnlichkeitspunkt enthält wie die Verbindungsgerade der Berührungspunkte von S mit S_i und S_j . Er findet, daß Q die Kreise S_{23} und S_{14} in vier von den Berührungspunkten der Kreise S_i mit S verschiedenen, kollinearen Punkten schneidet. Verf. gibt zahlreiche Eigenschaften von 6 „Kontaktkegelschnitten“ U_i und U'_i , das sind Γ fünfmal berührende Kegelschnitte; durch die Berührungspunkte z. B. von U_1 und von S_2, S_3 mit Γ geht die zirkuläre kubische Kurve C_{23} , und dasselbe gilt für S_1, S_4 und C_{14} . Diese 6 Kegelschnitte werden mit U'_0 , das ist die uneigentliche Doppelgerade, und mit U_0 , das ist eine beliebige Doppelgerade, durch die Eckpunkte eines Parallelepipedons dargestellt. Vier Kontaktkegelschnitte bilden ein kongruentes Quadrupel, das ist ein Quadrupel von Kegelschnitten, durch deren Berührungspunkte mit Γ eine biquadratische Kurve geht, wenn sie dargestellt werden durch zwei Punktepaare auf zwei parallelen Kanten oder auf zwei Diagonalen paralleler Seitenflächen oder auf zwei Körperdiagonalen. Schließlich schreibt Verf. über eine erweiterte Konfiguration.

G. Schaake (Groningen).

Pelišek, Miloslav: Sur le déplacement d'un triangle équilatéral dans l'espace et sur une surface spéciale d'ordre huitième. Publ. Fac. Sci. Univ. Masaryk Nr 254, 1—24 u. franz. Zusammenfassung 24—28 (1938) [Tschechisch].

Waerden, B. L. van der: Zur algebraischen Geometrie. XIII. Vereinfachte Grundlagen der algebraischen Geometrie. Math. Ann. 115, 359—378 (1938).

A birdview of the foundations of algebraic geometry as developed by the author in his preceding twelve papers "Zur algebraischen Geometrie". The emphasis is laid upon a concise and unified exposition of the main concepts and upon the presentation, in each instance, of the simplest available method or proof. The following features may be mentioned: The decomposition of an algebraic variety into irreducible components is treated by means of Hilbert's basis theorem, but without explicit use of the decomposition of ideals into primary components; a very clear account of the notion of the general point of a variety and of the method of "true specialization"; some illuminating remarks upon the choice of the ground field in questions relating to absolute and relative irreducibility of a variety and to intersections of general varieties; simplified proofs, based on the theory of correspondences, of various theorems dealing with intersections of varieties. *O. Zariski* (Baltimore).

Gherardelli, G.: Un' osservazione sulle serie di equivalenza sopra una curva algebrica riducibile. Atti Accad. naz. Lincei, Rend., VI. s. 27, 71—72 (1938).

Une série d'équivalence complète g_n^r sur une courbe $C = C_1 + C_2 + \dots + C_t$ réductible, est la somme (minima et maxima) de t séries linéaires complètes $g_{n_1}^{r_1}, g_{n_2}^{r_2}, \dots, g_{n_t}^{r_t}$ ($n = n_1 + n_2 + \dots + n_t, r = r_1 + r_2 + \dots + r_t$) resp. assignées sur C_1, C_2, \dots, C_t [cfr. F. Severi, Mem. R. Accad. Italia 3 (1932); ce Zbl. 6, 75]. L'A. remarque que, pour obtenir un groupe de g_n^r variable dans une série d'équivalence g_n^r quelconque subordonnée à g_n^r , il suffit de rapporter les séries linéaires $g_{n_1}^{r_1}, g_{n_2}^{r_2}, \dots, g_{n_t}^{r_t}$ aux points d'un même S_o moyennant t homographies arbitraires (généralement dégénères), et d'associer les groupes de ces séries qui correspondent à un même point de S_o . — Sur une courbe réductible, une série de groupes de points qui soit rationnelle et involutive n'est pas en général une série d'équivalence; ceci résulte p. ex. en considérant sur une courbe $C = C_1 + C_2$ — décomposée en deux coniques C_1, C_2 — la série rationnelle ∞^3 des groupes de 4 points qu'on obtient en associant les couples de points découpés sur C_1, C_2 par des droites de leurs plans, réciproques dans une réciprocity non dégénère assignée entre ceux-ci. *Beniamino Segre* (Bologna).

Severi, F.: Intorno alla teoria delle serie di equivalenza sulle curve riducibili. Atti Accad. naz. Lincei, Rend., VI. s. 27, 53—56 (1938).

Un système linéaire Σ de formes d'un hyperspace, coupe sur une courbe $C = C_1 + C_2 + \dots + C_t$ réductible de celui-ci une série d'équivalence g_n^r ; et l'A. a en outre précédemment démontré l'existence d'une infinité de systèmes linéaires associés à g_n^r , c'est-à-dire découpant g_n^r sur C et ayant la même dimension r de cette série [cfr. F. Severi, Mem. R. Accad. Italia 3 (1932); ce Zbl. 6, 75]. Ici il appelle Σ adjoint à C si chaque g_n^s ($s = 1, 2, \dots, r - 1$) subordonnée à g_n^r peut-être coupée sur C par un système linéaire de formes subordonné à Σ ; et il démontre qu'un système associé, n'est généralement pas adjoint. De plus il énonce sans démonstration que, au moins lorsque g_n^r est la somme minima d'un certain nombre de séries linéaires, il existe toujours des systèmes linéaires adjoints à g_n^r ; un système adjoint de dimension minima est caractérisé par les deux propriétés d'avoir la dimension $r + t - 1$ et de ne contenir aucune forme passant par la courbe C complète. L'A. fait enfin des remarques intéressantes sur l'exemple donné par Gherardelli (cfr. le réf. préc.), et énonce qu'on peut obtenir sur C les groupes de la série unirationnelle la plus générale en sommant les groupes homologues de t séries linéaires, assignées sur C_1, C_2, \dots, C_t et rapportées entre elles moyennant une correspondance plurilinéaire; la série unirationnelle résulte une série d'équivalence, seulement si la correspondance plurilinéaire est particulière. *Beniamino Segre* (Bologna).

Petrowsky, I.: On the topology of real plane algebraic curves. Ann. of Math., II. s. 39, 189—209 (1938).

An oval of a real plane algebraic curve is called positive if it does not lie within

other ovals, or if it lies with in an even number of consecutive ovals. Otherwise the oval is negative. Let $F(x, y) = 0$ be a real plane algebraic curve of order n , without real singularities. Let p and m be the number of its positive and negative ovals respectively. The following main result is proved: If n is even, then $|p - m| \leq \frac{3n^2 - 6n}{8} + 1$; if n is odd, then $|m - p - \Delta + \frac{k+1}{2}| \leq \frac{3n^2 - 4n + 1}{8}$, where k is the number of real points at infinite of the curve and Δ is, roughly speaking, the number of regions in the point set $F(x, y) > 0$ ($\Delta \leq k$). By a slight modification of Harnack's construction of curves with a maximum number of real circuits, it is proved that the above limits are the best possible. In the case $m = 0$ the main result gives precise limits for the number of ovals in a curve consisting of ovals exterior to each other. As a special case, a curve of order 6 cannot consist of more than 10 ovals exterior to each other (Hilbert-Rohn). For curves consisting of one outer oval and of S inner ovals exterior to each other it follows that $S \leq \frac{3n^2 - 6n}{8} + 1$. This upper limit is not the best. It is shown, however, following Hilbert's method for constructing curves with a maximum number of consecutive ovals, that the number $\frac{3n^2 - 6n}{8} + 1$ cannot exceed the best limit by more than 1, if $n = 4k + 2$, and by more than 3, if $n = 4k$ (in the case $n = 6$ the excess is actually 1, as has been shown by Rohn). The proofs are based upon the consideration of the deformation of the curve $F(x, y) = C$ when the constant C crosses the critical values of F , i.e. the values of F at the common solutions of the equations $F'_x = 0$, $F'_y = 0$. Essential in the treatment is the use of a formula of Jacobi-Euler concerning the solutions of a system of algebraic equations.

O. Zariski (Baltimore).

Schilling, O. F. G., and O. Zariski: On the linearity of pencils of curves on algebraic surfaces. *Amer. J. Math.* **60**, 320—324 (1938).

Mit Hilfe der vom zweiten Verf. entwickelten Theorie der unendlich benachbarten Basispunkte wird ein idealtheoretischer Beweis des bekannten Satzes gegeben: Wenn ein Kurvenbüschel auf einer algebraischen Fläche einen Basispunkt in einem einfachen Punkt der Fläche hat, so ist das Büschel entweder eine lineare Schar oder seine Kurven werden von den ϱ -fach gezählten Hyperflächen einer linearen Schar ausgeschnitten.

van der Waerden (Leipzig).

Gentry, Frank C.: Quaternary Cremona groups of ternary type. *Duke math. J.* **4**, 107—124 (1938).

Der Grundgedanke der vorliegenden Abhandlung ist in zwei früheren Untersuchungen von A. B. Coble zu suchen (dies. Zbl. **13**, 318; **14**, 176) und wird hier nicht in allen Einzelheiten wiederholt. Aus gewissen linearen ∞^3 Flächensystemen mit dem Grade 2 erhält man entsprechende involutorische Raumtransformationen; die gegebenen Flächensysteme besitzen einige einfache Basispunkte; sind diese veränderlich, so erhält man die erzeugenden Transformationen einer Gruppe „planarer Art“, die mit gewissen Gruppen linearer Transformationen isomorph ist. Die 13 betrachteten Flächensysteme bestehen alle aus Flächen 4. Ordnung; sie besitzen folgende Basismannigfaltigkeiten: 1. 1 Doppelgerade ε_0 , 1 rationale C^4 , die ε_0 3mal schneidet, 2 Geraden, die ε_0 treffen, 1 einfacher Basispunkt; 2. 1 Doppelgerade ε_0 , 1 C^7 des Geschlechts 2, die ε_0 5mal schneidet, 1 einfacher Basispunkt; 3. 1 Doppelgerade ε_0 , 1 Kegelschnitt und 3 Geraden, die ε_0 treffen, 2 einfache Basispunkte; 4. 1 Doppelgerade ε_0 , 1 elliptische C^6 , die ε_0 4mal schneidet, 2 einfache Basispunkte; 5. 1 Doppelgerade ε_0 , 1 rationale C^5 , die ε_0 3mal schneidet, 3 einfache Basispunkte; 6. 1 Doppelgerade ε_0 , 2 Kegelschnitte, die ε_0 treffen, 4 einfache Basispunkte; 7. 1 Doppelgerade ε_0 , 4 Geraden, die ε_0 treffen, 1 Doppelpunkt, 2 einfache Basispunkte; 8. 1 Doppelgerade ε_0 , 2 Geraden, die ε_0 treffen, 2 Doppelpunkte, 4 einfache Basispunkte; 9. 1 Doppelgerade, 3 Doppelpunkte, 6 einfache Basispunkte; 10. 1 Doppel-

kegelschnitt C^2 , 1 elliptische C^4 , die C^2 4 mal schneidet, 2 einfache Basispunkte; 11. 1 Doppelkegelschnitt C^2 , 1 kubische Raumkurve, die C^2 3 mal schneidet, 3 einfache Basispunkte; 12. 1 Doppelkegelschnitt C^2 , 2 Geraden, die C^2 treffen, 4 einfache Basispunkte; 13. 1 Doppelkegelschnitt, 1 Doppelpunkt, 6 einfache Basispunkte. In jedem Falle wird die gegebene Involution untersucht und die Gleichungen der betreffenden linearen Gruppe aufgestellt. *E. G. Togliatti (Genova).*

Williams, A. R.: Birational transformations in 4-space and 5-space. Bull. Amer. Math. Soc. 44, 272—278 (1938).

Analytische Untersuchung einiger bekannten Cremonaschen Transformationen. Im Raume S_4 die Transformation, die den Hyperebenen alle Quadriken entsprechen läßt, die eine rationale normale C^4 und einen Punkt P enthalten [P. Del Pezzo, Rend. Accad. Napoli (3) 1, 135 (1895)]; und die besonderen Fälle, wo P auf einer Sehne der C^4 liegt [A. Gennaro, Ann. Scuola norm. super. Pisa 15, § 14 (1927)], oder einem Punkt der C^4 unendlich benachbart ist. — Im Raume S_5 die Transformation, die den Hyperebenen alle Quadriken durch eine Veronesesche Fläche entsprechen läßt. *E. G. Togliatti (Genova).*

Differentialgeometrie:

Cartan, Élie: Le rôle de la théorie des groupes de Lie dans l'évolution de la géométrie moderne. (Oslo, 14.—18. VII. 1936.) C. R. congr. int. Math. 1, 92—103 (1937).

Die Entwicklung der Geometrie kann in dreierlei Weise von gruppentheoretischem Gesichtspunkt aus betrachtet werden. Der erste Gesichtspunkt ist der des Kleinschen Erlanger Programms. Der zweite geht von der Veblenschen Definition des einen geometrischen Objektes aus, der in bezug auf jedes Koordinatensystem durch eine Anzahl von Komponenten gegeben ist. Der dritte Gesichtspunkt vereinigt den differentialgeometrischen Begriff der Übertragung mit dem Lieschen Begriff der infinitesimalen Transformation. *van der Waerden (Leipzig).*

Tsuboko, Matsuji: On ruled surfaces having a given space curve as an asymptotic curve. Mem. Ryojun Coll. Engng. 10, 121—129 (1937).

Let S be a non-developable ruled surface having the space curve C as an asymptotic curve. The author defines a projective moving frame of reference along the curve C and gives a set of fundamental formulae (a projective analogy of the Frenet formulae). By using these formulae the author investigates the properties of the asymptotic tangents and the flecnodal tangents of S . Several properties are given of ruled surfaces which have only one flecnodal curve. The paper closes with a study of projective deformations of ruled surfaces. *J. Haantjes (Delft).*

Popa, I.: Osservazioni sopra la linea parabolica di una superficie. Atti Accad. naz. Lincei, Rend., VI. s. 27, 73—74 (1938).

Beweis einer von E. Bompiani gefundenen Konstruktion der Tangente an eine parabolische Linie auf einer Fläche (Mem. d. R. Acc. di Bologna, ser. VIII 1925/26). Es folgt die Herstellung einer Konstruktion der Schmiegungebene an dieselbe. — Die ∞^1 (in diesem Falle) singulären Moutardschen Quadriken Q_i in einem parabolischen Punkt P haben als Hauptteil der Charakteristik einen Kegelschnitt, dessen Ebene π_i durch die Tangente t in P geht. Abgesehen von einem Sonderfall, der mittels eines Grenzverfahrens gelöst wird, lautet die betreffende Konstruktion: man legt durch einen Punkt U aus dem R_3 die 5 möglichen π_i aus P , die eine M_2^5 bilden. Der geometrische Ort der Punkte U , für die die Polarebene der parabolischen Richtung in bezug auf M_2^5 die asymptotische Richtung enthält, stimmt mit der Schmiegungebene an die parabolische Linie überein. *D. Barbulian (Bucureşti).*

Hazebroek, P.: Sur le repère mobile dans l'espace projectif; hypersurfaces algébriques osculatoires. Nieuw Arch. Wiskde 19, 186—192 (1938).

Hazebroek, P.: Sur un problème de géométrie projective différentielle. Nieuw Arch. Wiskde 19, 173—185 (1938).

Jedem Punkte einer m -dimensionalen Mannigfaltigkeit X_m in einem projektiven

n -dimensionalen Raum sei ein projektives Bezugssystem (h) zugeordnet (das bewegende Bezugssystem). Der Übergang von einem festen Bezugssystem (κ) zu den Systemen (h) wird gegeben durch die Formel $z^{\kappa} = a_i^{\kappa} z^i$. Es ist $da_i^{\kappa} = \omega_i^{\kappa} a_j^{\kappa}$, wo die ω_i^{κ} Pfaffsche Formen sind. Mittels dieser fundamentalen Gleichungen werden die Bedingungen dafür angegeben, daß eine algebraische X_p mit der Gleichung $h_{i_1 \dots i_p} z^{i_1} \dots z^{i_p} = 0$ und die X_m in einem Punkte eine Berührung k -ter Ordnung haben. — Als Anwendung bestimmt Verf. in der zweiten Arbeit die Flächen S im 3-dimensionalen projektiven Raum mit der Eigenschaft, daß die Geraden von zwei Kongruenzen, welche in bezug auf S polar sind, auch polar sind in bezug auf eine feste Quadrik. Es zeigt sich, daß im Falle die Quadrik nicht degeneriert ist, die eine Kongruenz von den Normalen von Wilczynski gebildet wird.

J. Haantjes (Delft).

Tuller, Annita: The measure of transitive geodesics on certain three-dimensional manifolds. Duke math. J. 4, 78—94 (1938).

In dieser Arbeit wird der Verlauf der geodätischen Linien auf dreidimensionalen Riemannschen Räumen konstanter negativer Krümmung untersucht. Die Räume werden als vollständig vorausgesetzt. Man erhält sie in Analogie zum zweidimensionalen Fall aus dem hyperbolisch ausgemessenen Kugellinnern, wenn man alle gegenüber einer hyperbolischen (in der Kugel eigentlich diskontinuierlichen) Bewegungsgruppe kongruenten Punkte identifiziert. Es wird bewiesen, daß die transitiven (d. h. im vierdimensionalen Phasenraum der Linienelemente überall dicht liegenden) geodätischen Linien im maßtheoretischen Sinne den allgemeinen Fall darstellen, wenn der Raum ein endliches Volumen besitzt, allgemeiner, wenn die geodätischen Linien im allgemeinen die Wiederkehrseigenschaft besitzen. Die Beweismethoden sind vielfach vom zweidimensionalen Fall übernommen. Ref. bemerkt, daß sich auch die metrische Transitivität mit seinen Methoden genau wie dort beweisen läßt.

E. Hopf (Leipzig).

Bochner, S.: Differentiable and Riemann metric. Duke math. J. 4, 51—54 (1938).

Folgende interessante Charakterisierung der Riemannschen Maßbestimmung wird in sehr einfacher Weise bewiesen: In einer n -dimensionalen mit Koordinaten versehenen Umgebung S_n der Klasse C_p ($p \geq 2$) sei eine Distanzfunktion $D(x, y)$ definiert derart, daß $D(x, y) \geq 0$, $D(x, x) = 0$, $D(x, y) + D(y, z) \geq D(x, z)$ ist und daß $D(x, y)^2$ im Produktraum $S_n \times S_n$ zu C_p gehört. Dann ist die durch $D(x, y)$ induzierte Bogenlänge [d. h. die untere Grenze von $\sum D(x^{(k)}, x^{(k-1)})$ für Punkte $x^{(k)}$ auf der Kurve] einer Riemannschen Maßbestimmung entsprungen, und zwar ist der Fundamentaltensor g_{ik} von der Klasse C_{p-2} [bzw. analytisch, falls $D(x, y)^2$ es ist]. — Selbst wenn durchwegs $D(x, y) > 0$ ist für $x \neq y$, kann $|g_{ik}|$ verschwinden auf einer Punktmenge mit Häufungspunkt [Beispiel für $n = 1$: $D(x, y) = |\varphi(x) - \varphi(y)|$ mit wachsendem $\varphi(x)$]. Verf. zeigt, daß dies für analytische $D(x, y)^2$ nicht möglich ist.

W. Feller.

Kilichevsky, M.: Sur la transformation de la métrique dans l'espace non euclidien. J. Inst. Math. Acad. Sci. Ukraine Nr 4, 25—32 (1938) [Ukrainisch].

Dans le présent travail on examine la question concernant la transformation de la métrique dans l'espace non euclidien et dont la condition est celle de conserver les courbes déterminées à l'aide du système d'équations différentielles:

$$\frac{d}{ds} \left(p \frac{dx^i}{ds} \right) + p \Gamma_{\mu\nu}^i \frac{dx^\mu}{ds} \frac{dx^\nu}{ds} = 0 \quad (1)$$

où $\Gamma_{\mu\nu}^i$ sont les coefficients qui déterminent le transport parallèle du vecteur et coïncident dans le cas particulier de la géométrie de Riemann avec les symboles de 2ième genre de Christoffel, p une fonction scalaire quelconque, longueur du vecteur $A^i = p \frac{dx^i}{ds}$. La variation de la longueur lors du transport parallèle du vecteur A_i s'exprime par la formule:

$$\delta(p^2) = p^2 x^i \dot{x}^k \nabla_{\mu} g_{ik} dx^\mu = 2p^2 \kappa_{\mu} dx^\mu.$$

Dans la géométrie de Weyl forme κ_{μ} un champ vectoriel. En posant la condition

de la conservation des courbes déterminées par l'équation (1) nous obtiendrons: 1. que les coefficients $\Gamma_{\mu\nu}^i$ ne dépendent pas de la transformation de la métrique, et 2. que le nouveau tenseur métrique doit satisfaire à la relation.

$$\nabla_{\nu} \bar{g}_{ik} = \left(\frac{d\epsilon'}{ds} \right)^2 \nabla_{\nu} g_{ik}.$$

Autoreferat.

- Bompiani, E.:** Sulle varietà anolonomie. I. Alcuni teoremi generali. Atti Accad. naz. Lincei, Rend., VI. s. 27, 37—45 (1938).
Bompiani, E.: Sulle varietà anolonomie. II. Le V_3^2 di S_3 proiettivo. Atti Accad. naz. Lincei, Rend., VI. s. 27, 45—52 (1938).

Une étude du voisinage d'ordre 2 d'un point O d'une variété non-holonomie V_n^m . Les éléments d'ordre 2 des courbes intégrales de la V_n^m passant par O se trouvent situés sur une calotte holonome d'ordre 2 (calotte osculatrice au point O). Dans le cas d'une V_n^{n-1} dans l'espace projectif S_n : $dz = \mu_i(x, z) dx^i$, il existe une corrélation faisant correspondre à chaque direction issue du point O le S_{n-2} qui est la trace sur l'hyperplan tangent en O de l'espace S_{n-1} : $Z - z = \mu_i(x, z)(X^i - x^i)$, lorsque le point x, z tend vers O le long d'une courbe tangente à cette direction. Les directions situées dans les S_{n-2} correspondants sont les directions asymptotiques de la calotte osculatrice au point O . — Le second travail est consacré à l'étude du voisinage d'ordre >2 d'un point régulier O d'une V_3^2 dans l'espace projectif S_3 , dans le but de définir, intrinsèquement, au point O , un système de référence. *O. Borůvka (Brno).*

Pauc, Christiane: Interprétation géométrique dans les variétés non holonomes des théories d'intégration des systèmes d'équations de Pfaff. C. R. Acad. Sci., Paris 206, 885—888 (1938).

A toute variété V_n^{n-1} définie par une équation de Pfaff $\lambda_i dx^i = 0$ à n variables se trouve associée une corrélation $\xi_h = \gamma_{hk} u^k$ faisant correspondre à chaque direction (u^k) du plan tangent le S_{n-2} des coordonnées (ξ_h); ce S_{n-2} est la trace sur le plan tangent du S_{n-1} : $\lambda_i(\bar{x}') (X^i - \bar{x}^i) = 0$ lorsque le point (\bar{x}^i) tend vers (x^i) le long d'une courbe intégrale tangente à (u^k) [E. Bompiani, Rend. Accad. naz. Lincei 27, 37 (1938); voir le réf. préc.]. Dans la présente note l'auteur fait remarquer que, la corrélation focale adjointe: $\xi_h = w_{hk} u^k$, $w_{hk} = \gamma_{hk} - \gamma_{kh}$, jouit de la propriété que, deux directions conjuguées dans cette corrélation fournissent deux éléments linéaires intégraux en involution au sens de M. E. Cartan. Une direction conjuguée de toutes les autres fournit un élément linéaire caractéristique. Cette interprétation géométrique d'éléments du processus d'intégration d'une équation de Pfaff s'étend aux systèmes de Pfaff. *O. Borůvka (Brno).*

Allgemeine metrische Geometrie, Integralgeometrie, Konvexes und Verwandtes:

Pauc, Christian: Semi-continuités d'inclusion dans les espaces généraux de M. Fréchet. C. R. Acad. Sci., Paris 206, 565—567 (1938).

L'auteur donne pour des espaces (V) (espaces à voisinage de M. Fréchet) des définitions qui généralisent celles des semi-continuités d'inclusion définies jusqu'ici seulement pour des espaces distanciés. Il étend aussi ces définitions aux espaces (L) (classes limites de M. Fréchet) et se trouve conduit pour cela à définir pour la fonction φ de l'argument $a \in A$, les ensembles

$$\varphi_{\inf}(a) = \prod \lim \varphi(a_n) = \prod \overline{\lim} \varphi(a_n),$$

$$\varphi_{\sup}(a) = \sum \lim \varphi(a_n) = \sum \underline{\lim} \varphi(a_n)$$

les opérations \prod et \sum étant prises par rapport à toutes les suites a_1, \dots, a_n, \dots qui convergent vers a .

E. Blanc (Toulon).

Blanc, E.: Les espaces métriques quasi convexes. Ann. École norm., III. s. 55, 1—82 (1938).

X sei ein metrischer Raum. Inneres, Äußeres und Begrenzung einer Menge A seien durch $A_i = X - \overline{X - A}$, $A_e = X - \bar{A}$, $A_f = \bar{A} - \overline{X - A}$ definiert. Ein Punkt

von A_f heiße regulär, wenn er Häufungspunkt sowohl von A_i wie A_s ist. Eine Menge heiße regulär, wenn alle Punkte ihrer Begrenzung regulär sind. Die regulären Mengen werden auf verschiedene Weise charakterisiert. Ferner seien $s(a, \alpha)$, $s(a, \bar{\alpha})$, $\sigma(a, \alpha)$ der Reihe nach die Mengen der Punkte x , für die $ax < \alpha$, $ax \leq \alpha$, $ax = \alpha$ ist. An Beispielen wird gezeigt, daß auch in metrischen Räumen, in denen der Bolzano-Weierstrasssche Satz gilt, im allgemeinen keine der folgenden Aussagen richtig ist: $F_1) s(a, \bar{\alpha}) = s(a, \alpha)$, $F_2) s(a, \alpha)_f = \sigma(a, \alpha)$, $I_1) s(a, \alpha) = s(a, \alpha)_i$, $I_2) s(a, \bar{\alpha})_f = \sigma(a, \alpha)$, $P) \sigma(a, \alpha) = A_f$ für eine passende Menge A , $C_1) s(a, \alpha)$ [oder $s(a, \bar{\alpha})$] ist zusammenhängend, $C_2) X - s(a, \alpha)$ [oder $X - s(a, \bar{\alpha})$] ist zusammenhängend, $R_1) s(a, \bar{\alpha})$ ist regulär, $R_2) s(a, \alpha)$ ist regulär. Jedoch zeigt sich, daß $F_1)$ und $F_2)$ quivalent sind und ebenso $I_1)$ und $I_2)$, ferner folgt $R_1)$ aus F_i , $R_2)$ aus I_i , aber nicht umgekehrt. Es wird dann zu Konvexittsforderungen übergegangen: zunächst die Mengersche M): Zu je zwei Punkten a, b gibt es einen Punkt $c \neq a, b$ mit $ac + cb = ab$. Dann A): Zu zwei Punkten a, b und zwei Zahlen α und α' mit $\alpha + \alpha' > ab$ gibt es stets einen Punkt c mit $ac < \alpha$ und $cb < \alpha'$. Im allgemeinen sind A) und M) unabhängig, für in sich kompakte Räume sind sie jedoch quivalent. Schließlich wird der Raum quasikonvex (q.k.) in b bezüglich a genannt, wenn zu jedem $\delta > 0$ ein $\varepsilon(\delta, a, b) > 0$ gefunden werden kann derart, daß $s(a, ab - \varepsilon)$ und $s(b, \delta)$ einen Punkt gemeinsam haben. Wenn X in b bezüglich aller Punkte $a \neq b$ q.k. ist, so heißt X q.k. in b , und X heißt q.k. schlechthin, wenn X in jedem Punkt q.k. ist. F_i ist quivalent mit der Quasikonvexität des Raumes. Letztere ist auch quivalent mit der Forderung, daß für kein a die Funktion ax für $x \neq a$ ein schwaches Minimum besitzt. Verlangt man statt dessen nur, daß sie kein starkes Minimum besitzt, und ersetzt man ferner beidemal „Minimum“ durch „Maximum“, so erhält man die von Verf. als schwache Quasikonvexität des Raumes und als schwache und starke Regularität der Metrik bezeichneten Begriffe. Für $C_1)$ sowohl wie dafür, daß die $s(a, \bar{\alpha})$ regulär sind, ist schwache Quasikonvexität notwendig, starke hinreichend. Aus starker Regularität der Metrik folgt I_i . Wenn das Komplement jeder beschränkten Menge höchstens eine unbeschränkte Komponente hat, so ist schwache Regularität für $C_2)$ notwendig und hinreichend. — Es sei $E_\alpha = \sum_{a \in E} s(a, \alpha)$, $E_{(\alpha)} = \sum_{a \in E} s(a, \bar{\alpha})$ und $E_{\bar{\alpha}}$ die Menge der Punkte,

die von E höchstens den Abstand α haben, es ist $E_\alpha \subset E_{(\alpha)} \subset E_{\bar{\alpha}}$ und $\bar{E}_{\bar{\alpha}} \subset E_{\bar{\alpha}}$. Falls jedoch der Raum gleichmäßig q.k. ist, d. h. falls die obige Funktion $\varepsilon(\delta, a, b)$ unabhängig von a und b gewählt werden kann, so ist $\bar{E}_\alpha = E_{\bar{\alpha}}$, und wenn $\bar{E}_\alpha = E_{\bar{\alpha}}$, dann ist der Raum q.k. Man betrachte dann $(E_\alpha)_\beta = E_{\alpha\beta}$, ... Im allgemeinen sind die 4 Mengen $E_{\alpha\beta}$, $E_{\bar{\alpha}\beta}$, $E_{\alpha\bar{\beta}}$, $E_{\bar{\alpha}\bar{\beta}}$ verschieden. Wenn der Raum gleichmäßig q.k. ist, so sind unter diesen Mengen nur zwei verschiedene, und wenn letzteres der Fall ist, so ist der Raum q.k. Bedingung A) ist quivalent mit $E_{\bar{\alpha}\beta} = E_{\alpha\bar{\beta}} = E_{\alpha+\beta}$ zusammen mit $E_{\alpha\bar{\beta}} = E_{\bar{\alpha}\beta} = E_{\bar{\alpha}+\beta}$. Anschließend werden ausführlich die metrischen und topologischen Limites von E_{α_n} für konvergentes α_n und von $(E_n)_\alpha$ für konvergentes E_n untersucht. Schließlich wird im Anhang ein Beispiel für einen konvexen, aber nicht quasikonvexen Raum gegeben.

H. Busemann (Princeton, N. J.).

Segre, Beniamino: Proprietà in grande delle linee piane convesse. J. Mat. pura apl. Univ. So Paulo 1, 1—39 (1936).

Ausführliche und systematische Darstellung der Untersuchungen, deren Ergebnisse der Verf. schon in früheren Noten (vgl. dies. Zbl. 10, 370; 11, 35, 130; ferner 15, 315) mitgeteilt hat. Vorkenntnisse über konvexe Kurven werden nicht vorausgesetzt, so daß auch eine Reihe bekannter elementarer Sätze, z. T. auf neue Weise, hergeleitet wird.

W. Fenchel (Kopenhagen).

Dines, L. L.: On convexity. Amer. Math. Monthly 45, 199—209 (1938).

Erläuterung der beiden Definitionen der Konvexität einer Punktmenge als „linearer Zusammenhang“ einerseits und als Sttzeigenschaft andererseits sowie der entsprechenden Definitionen der konvexen Hülle als Menge der Schwerpunkte nichtnegativer

Massenbelegungen bzw. als Durchschnitt von Halbräumen. Eingehend wird die Frage der Äquivalenz diskutiert, wobei auch die Rolle von hierfür notwendigen Voraussetzungen wie Beschränktheit, Abgeschlossenheit und Existenz von inneren Punkten klargestellt wird. Schließlich wird auf die Verallgemeinerungen auf Banachsche Räume hingewiesen.

W. Fenchel (Kopenhagen).

Alexandroff, A.: Zur Theorie der gemischten Volumina von konvexen Körpern. II. Neue Ungleichungen zwischen den gemischten Volumina und ihre Anwendungen. Rec. math. Moscou, N. s. 2, 1205—1235 u. deutsch. Zusammenfassung 1235—1238 (1937) [Russisch].

Ausführliche Darstellung des in einer früheren Note (vgl. dies. Zbl. 16, 137) skizzierten Beweises für die allgemeine Ungleichung

$$V(H_1, \dots, H_{n-1}, H_n)^2 \geq V(H_1, \dots, H_{n-1}, H_{n-1}) \cdot V(H_1, \dots, H_n, H_n)$$

zwischen den gemischten Volumina von n konvexen Körpern H_1, H_2, \dots, H_n des n -dimensionalen Raumes. Dieser Beweis zeigt, wie Verf. hier hinzufügt, daß die Ungleichung auch noch gilt, wenn an Stelle der Stützfunktion H_n (oder H_{n-1}) die Differenz von zwei beliebigen Stützfunktionen eingesetzt wird (vgl. hierzu den 1. Teil der Arbeit, dies. Zbl. 17, 426). Ferner werden mehrere Folgerungen aus der Ungleichung hergeleitet. Außer der auch schon vom Ref. (vgl. dies. Zbl. 15, 120—121) auf demselben Wege erhaltenen Verallgemeinerung des Brunn-Minkowskischen Satzes seien die folgenden genannt. Unter der Krümmungsfunktion m -ter Ordnung des konvexen Körpers H verstehe man die gemischte Oberflächenfunktion $F\left(\underbrace{H, \dots, H}_m, \underbrace{E, \dots, E}_{n-m-1}, \omega\right)$, wo E

die Einheitskugel bezeichnet (vgl. dies. Zbl. 17, 426). Dann gilt: haben zwei konvexe Körper für ein m mit $1 \leq m \leq n-1$ dieselbe Krümmungsfunktion m -ter Ordnung, so lassen sie sich durch Translation ineinander überführen (vgl. hierzu auch W. Fenchel und B. Jessen: Mengenfunktionen und konvexe Körper [Math.-fys. Medd. Danske Vid. Selsk. 16, H. 3 (1938)]). Unter allen konvexen Körpern H mit gegebenem m -ten Quermaßintegral $\left[\text{d. h. } V\left(\underbrace{H, \dots, H}_m, \underbrace{E, \dots, E}_{n-m}\right)\right]$ hat die Kugel und nur diese für jedes $k < m$ das kleinste k -te Quermaßintegral. (Referiert nach dem deutschen Auszug.)

W. Fenchel (Kopenhagen).

● Delvendahl, Otto: Über Kurven von beschränkter Ordnung. (Neue dtsh. Forschungen. Abt. Math. Hrsg. v. Hans R. G. Günther u. Erich Rothacker. Bd. 173.) Berlin: Junker & Dünhaupt 1938. 48 S. RM. 3.—.

Die Arbeit enthält einen neuen Beweis des Satzes, daß jeder Bogen B im projektiven E_n , welcher von der Ordnung $(n+1)$ bezüglich der Gesamtheit aller Hyper Ebenen ist, sich darstellen läßt als Summe von nicht mehr als s_n Bogen n -ter Ordnung, wobei s_n nur von n abhängt (nicht von B) (vgl. Haupt, Math. Ann. 108, 126; dies. Zbl. 6, 184). Auch dieser Beweis arbeitet, roh gesprochen, mit dem Expansionsatz; eine wesentlich neue Bemerkung des Verf. ist aber, daß die Expansion im Falle der Ordnung $(n+1)$ sozusagen unbeschränkt möglich ist, daß man also, um ihre Anwendbarkeit zu sichern, nicht vorher B in geeignete Teilbogen zu zerlegen braucht. Hierdurch sowie durch einige andere, teilweise neue Wendungen gelingt es, s_n auf $2^{n-2} + 3$ herunterzudrücken (bisher war nur $7 \cdot 2^{n-2} - 2$ bekannt), welcher Wert für $n=2$ und $n=3$ als genaue Schranke nachgewiesen wird. Für Bogen mit Doppelpunkt ergibt sich 4 bzw. 5 als Schranke, je nachdem n gerade oder ungerade ist. Für Kurven sind die Schranken je um 1 niedriger. Im Laufe der Untersuchung wird auch ein für den Fall der Ordnung $(n+1)$ gültiger einfacher Beweis des Kontraktionsatzes gegeben. Am Schlusse weist Verf. darauf hin, daß sich der Beweis ohne weiteres auf den Fall der Ordnung bezüglich eines ebenen Kurvensystems überträgt (vgl. Haupt, Mh. Math. Phys. 40, 1; dies. Zbl. 7, 29), übrigens auch, wie Ref. — vorbehaltlich näherer Rechtfertigung — hinzufügen möchte, auf die allgemeineren von M. Linsman

[Mem. Acad. Roy. Belg. Sci. 17, 3 (dies. Zbl. 18, Heft 7)] behandelten Ordnungsprobleme, durch welche z. B. auch der Fall sphärischer Ordnung mit umfaßt wird.

Topologie:

Haupt (Erlangen).

Pospíšil, Bedřich: Sur le nombre des topologies d'un ensemble donné. Čas. mat. fys. 67, 100—102 (1938).

Es handelt sich um die Bestimmung der Mächtigkeit aller Möglichkeiten, einer Menge E beliebiger Mächtigkeit \aleph eine „allgemeine Topologie“ dadurch aufzuprägen, daß man jeder Teilmenge von E eine zweite Teilmenge von E als abgeschlossene Hülle zuordnet; hierbei wird die „allgemeine Topologie“ noch der einen oder anderen Nebenbedingung unterworfen. U. a. ergibt sich, daß eine Menge der Mächtigkeit \aleph_0 auf genau 2^{\aleph_0} verschiedene Arten metrisiert werden kann. Nöbeling (Erlangen).

Hyers, D. H.: A note on linear topological spaces. Bull. Amer. Math. Soc. 44, 76—80 (1938).

A Hausdorff space T is called a linear topological space (see Kolmogoroff, this Zbl. 10, 182) if it is a linear space and if the operations of linearity are continuous in the Hausdorff topology. Certain types of such spaces are characterized here. If T is locally bounded it is "pseudo-normable" and conversely. If T is locally compact it is linearly homeomorphic to a finite dimensional Euclidean space. Other results are also obtained. Montgomery (Northampton).

Sierpiński, Waclaw: Sur une propriété des espaces métriques séparables. Fundam. Math. 30, 129—131 (1938).

Verf. beweist in einem beliebigen metrischen separablen Raum E die Existenz einer abzählbaren oder endlichen Familie Φ von in E gleichzeitig offenen und abgeschlossenen Teilmengen derart, daß jede gleichzeitig offene und abgeschlossene Teilmenge H von E folgendermaßen dargestellt werden kann:

$$\begin{aligned} H &= \lim E_n = (E_1 + E_2 + E_3 + \dots)(E_2 + E_3 + \dots)(E_3 + \dots) \dots \\ &= E_1 E_2 E_3 \dots + E_2 E_3 \dots + E_3 \dots + \dots, \end{aligned}$$

wobei $E_n \in \Phi$ für $n = 1, 2, \dots$

Nöbeling (Erlangen).

Hausdorff, F.: Erweiterung einer stetigen Abbildung. Fundam. Math. 30, 40—47 (1938).

Kuratowski, Casimir: Remarques sur les transformations continues des espaces métriques. Fundam. Math. 30, 48—49 (1938).

Es wird gezeigt: E sei ein metrischer Raum, $F \subset E$ und F sei in E abgeschlossen. I. Eine stetige Abbildung von F auf einen metrischen Raum \bar{F} läßt sich zu einer stetigen Abbildung f auf einen geeigneten metrischen Raum $\bar{E} \supset \bar{F}$ erweitern. II. Diese Erweiterung ist insbesondere so möglich, daß $\bar{E} - F$ topologisch auf $\bar{E} - \bar{F}$ abgebildet wird. III. Eine topologische Abbildung von F läßt sich zu einer topologischen Abbildung von E erweitern. Hierbei ist wesentlich, daß über E keine anderen Voraussetzungen gemacht werden, als daß es ein metrischer Raum ist und daß die Metrik von \bar{F} beibehalten wird (sonst wird z. B. III. trivial). — Läßt man diese Forderungen fallen, so kann man, wie Kuratowski bemerkt, Teilresultate der Hausdorffschen Arbeit sehr einfach bekommen. Es sei nämlich bei denselben Bezeichnungen L ein linearer normierter Raum, der E topologisch enthält, R sei der Raum der reellen Zahlen, f eine stetige Transformation von E auf \bar{E} . Die Funktion $g(x) = [f(x), \delta(x), x \cdot \delta(x)]$, wo $\delta(x)$ den Abstand des Punktes x von F bezeichnet, definiert dann eine stetige Transformation ϱ von E auf eine Teilmenge des Cartesischen Produkts $\bar{E} \times R \times L$, die auf F mit f übereinstimmt und auf $E - F$ eine Homöomorphie ist. Interessante Spezialfälle bekommt man, wenn man E oder \bar{F} als separabel annimmt, da dann L als Hilbertscher Raum angenommen werden darf. H. Busemann (Princeton).

Zorn, Max: Sur le lemme de Schwarz. C. R. Acad. Sci., Paris 206, 725—727 (1938).

Es sei S ein metrisierbarer topologischer Raum, der im kleinen zusammenhängend

ist und der von keinem seiner Punkte zerlegt wird. Weiter sei F eine Familie stetiger Abbildungen von Teilmengen von S auf Teilmengen von S , die offene Mengen auf offene Mengen abbilden. F sei eine normale Familie und sei hinsichtlich der Multiplikation abgeschlossen. Die Abbildungen in F , die den Punkt p invariant lassen und die überdies eine inverse Abbildung in F besitzen, bilden eine Gruppe R_p von Rotationen. Der Kreis $K(p, q)$ um p durch $q \neq p$ besteht aus all den Punkten, die aus q durch Rotationen in R_p hervorgehen. Zerlegen diese Kreise den Raum S , so kann man z. B. Schwarz' Lemma folgendermaßen aussprechen: Ist f in F , $p = f(p)$ und $x \neq p$, dann liegt $f(x)$ in der p enthaltenden Komponente von $S - K(p, x)$. *Baer.*

Whyburn, G. T.: Interior transformations on surfaces. Amer. J. Math. **60**, 477—490 (1938).

Verf. beweist: Ist A eine (berandete oder unberandete) zweidimensionale Mannigfaltigkeit und $T(A)$ eine eindeutige, stetige Abbildung von A derart, daß das Urbild jeder offenen Teilmenge von A in $T(A) = B$ offen und das Urbild jedes Punktes von B nulldimensional ist, so ist auch B eine zweidimensionale Mannigfaltigkeit. Ist A speziell eine zweidimensionale Sphäre, so ist B eine zweidimensionale Zelle, Sphäre oder projektive Ebene. *Nöbeling* (Erlangen).

Whyburn, G. T.: The mapping of Betti groups under interior transformations. Duke math. J. **4**, 1—8 (1938).

Es sei A eine kompakte Menge, N eine (echte oder unechte) Teilmenge von A derart, daß $N \cdot A - N$ höchstens einpunktig ist; es sei T eine innere Abbildung von A [d. h. eine eindeutige, stetige Abbildung, welche jede offene Teilmenge von A auf eine offene Teilmenge von $T(A)$ abbildet]; es sei $M = T(N)$. Verf. beweist: Ist die eindimensionale Bettische Zahl $p^1(M)$ von M endlich, so wird durch T die eindimensionale rationale Bettigruppe $B_r^1(N)$ von N homomorph in diejenige von M abgebildet. Ist $p^1(N)$ endlich, so ist $p^1(M)$ endlich und $\leq p^1(N)$. *Nöbeling* (Erlangen).

Levin, Madeline: An extension of the Lefschetz intersection theory. Rev. Ci., Lima, **39**, Nr 421, 93—118 (1937).

Lefschetz (Topology, Chap. IV, §§ 3, 4, New York 1930) defined the intersection $C_p \cdot C_q$ of two singular chains on a manifold $K - L$ and established topological invariance. But this was subject to the restriction that C_p and C_q did not meet one another's boundaries on $K - L$. The author develops the intersection theory without this restriction and obtains an analogue of the boundary formula,

$$F(C_p \cdot C_q) = C_p \cdot F(C_q) + (-1)^{n-q} F(C_p) \cdot C_q \bmod N,$$

where N is a neighborhood of L .

A. W. Tucker (Princeton).

Wylie, S.: Irregularity in complexes. Ann. of Math., II. s. **39**, 247—255 (1938).

A simplex x of an n -complex K is regular if the star of x has the relative homologies of an n -cell; if all simplexes of K are regular K is a manifold. The author shows that a complex cannot have all its simplexes regular except some of a single dimension p ($\neq 0$ or $n - 1$). He gives an ingenious construction to determine a complex with all simplexes of dimension $< p$ regular but some of dimension p not regular ($p < n$). He also constructs an example of a complex possessing star and closure uniformity but not intercept uniformity [see Tucker, Ann. of Math., II. s. **34**, 191—243 (1933); this Zbl. **6**, 423], thereby settling a question which had been left open. *A. W. Tucker.*

Komatu, Atuo: Über die Dualitätssätze der Überdeckungen. Jap. J. Math. **13**, 493—500 (1937).

The author develops the duality of Kolmogoroff [Rec. math. Moscou, N. s. **1**, 97—102 (1936); this Zbl. **14**, 38] for the covering complexes of Reidemeister [J. reine angew. Math. **173**, 164—173 (1935); this Zbl. **12**, 126]. An α -covering of an abstract cell complex K with respect to an Abelian group X is a complex $K(\alpha, X)$ consisting of r -cells $x\alpha^r$, where $x \in X$ and $\alpha^r \in K$, such that $x\alpha_j^{r-1}$ is on the boundary of $x\alpha_j^r$ when α_j^{r-1} is on the boundary of α_j^r and $x\alpha_j^{r-1} = x'$ is an automorphism of X ;

it is a u -covering $K(u, X)$ if the automorphism goes the other way, i.e. $x = x' \gamma_{ij}$. The author shows that if A and B are locally bicomact Abelian groups which are dual (character) groups in the sense of Pontrjagin and van Kampen, then the rings of continuous automorphisms of A and B are isomorphic. The coverings $K(o, A)$ and $K(u, B)$ are called dual if A and B are dual and if the automorphisms γ_{ji} and γ_{ij} are continuous and corresponding under the isomorphism mentioned above. The r -dimensional homology groups associated with $K(o, A)$ and $K(u, B)$ are then proved to be dual, as are those of dimensions r and $n - r$ of $K(u, A)$ and $K(u, B)$ provided K is an n -manifold. The author applies this to the case in which A consists of the finite linear combinations with integer coefficients of elements of the path group of K , and so obtains a duality between groups of the homotopy type of Reidemeister. He also considers relative homologies and obtains results for u - and o -coverings along the lines of the Pontrjagin form of the Alexander duality theorem.

Tucker and Wallman (Princeton).

Mechanik.

Narasinga Rao, A.: Through a railway window. Proc. Indian Acad. Sci., Sect A 7, 156—161 (1938).

The landscape (an infinite plane) appears to an observer as if mapped on a unit sphere with the eye for centre. The author discusses the deformation of this representation as the observer travels along a straight track with constant velocity.

J. L. Synge (Toronto).

Beles, A.: La notion de secousse et son rôle dans la dynamique. Bull. Math. Phys. Ecole polytechn. Bucarest 8, 77—80 (1937).

Lampariello, G.: Estensione del teorema di Jacobi sul viriale e riferimenti di minima energia cinetica. Atti Accad. naz. Lincei, Rend., VI. s. 26, 325—335 (1937).

Die Lagrange-Jacobische „Virialidentität“ wird auf den Fall einer Relativbewegung übertragen und in dieser Form zur Charakterisierung derjenigen sich um den Schwerpunkt drehenden Achsenkreuze angewandt, die die kinetische Energie eines Punktsystems zum Minimum machen (die Fragestellung rührt von Almansi her; vgl. Mem. Accad. naz. Lincei 1913). Die sich derart ergebenden Bedingungen sind Differentialgleichungen, die sich im Falle ebener Bewegungen erheblich vereinfachen. Als ein explizit integrierbares Beispiel wird der Fall des von Mestschersky (Bull. Sci. math. 1894) betrachteten Anziehungsgesetzes durchgerechnet.

Wintner (Baltimore).

Graffi, Dario: Un limite superiore per la frequenza e lo smorzamento dei sistemi oscillanti dissipativi. Boll. Un. Mat. Ital. 17, 15—19 (1938).

Der Verf. beweist folgenden Satz: Führt ein mechanisches System mit Energiezerstreuung kleine freie Schwingungen um eine stabile Gleichgewichtslage aus, so besitzen die Frequenzen und die Dämpfungskonstanten dieser Schwingungen eine vom Ausdruck der kinetischen Energie unabhängige obere Grenze.

N. Tschebotaröw.

Colonnetti, G.: Il secondo principio di reciprocità e le sue applicazioni al calcolo delle deformazioni permanenti. I. Atti Accad. naz. Lincei, Rend., VI. s. 27, 75—79 (1938).

Der Verf. gibt in Erweiterung früherer Arbeiten eine neue Form des zweiten Prinzips der Reziprozität und zeigt dessen Anwendung auf das elastisch-plastische Gleichgewicht eines Körpers. Diese neue Form besagt: Das über den ganzen Körper erstreckte Integral der Summe der Produkte der Komponenten einer eingepprägten Verzerrung und der entsprechenden Spannungskomponenten, die von einem beliebigen System äußerer Kräfte herrühren, ist gleich der Arbeit, welche die äußeren Kräfte bei der Verformung vom ursprünglichen Zustand in den jener Verzerrung entsprechenden Endzustand leisten würden. — Besonders hervorzuheben ist die Anwendung auf das elastisch-plastische Gleichgewicht: Die Verschiebung eines Körperpunktes nach irgend-einer Richtung vermöge eines gegebenen Systems von plastischen Verformungen ist

gleich dem Integral der Summe der einzelnen Komponenten der plastischen Verformung und der entsprechenden Spannungskomponenten, die in dem Körper durch eine Kraft 1, die in jenem Punkte und nach jener Richtung wirkt, erzeugt wird.

Th. Pöschl (Karlsruhe).

Himmelsmechanik, Gleichgewichtsfiguren:

Sokoloff, G.: Sur un mémoire de Kivéliovitch. J. Inst. Math. Acad. Sci. Ukraine Nr 4, 69—71 (1938) [Ukrainisch].

C'est dans un Mémoire publié dans les Rendiconti dei Lincei (ce Zbl. 6, 228) que Kivéliovitch s'est occupé de la régularisation des chocs binaires pour des forces proportionnelles à l'inverse d'une puissance quelconque ($k + 1 > 1$) de la distance (r). — En transformant les équations différentielles du mouvement, Kivéliovitch avait introduit au lieu de t une nouvelle variable indépendante u d'après la position:

$$dt = r^k du \text{ avec } u = 0 \text{ pour } t = t_1 \quad (1)$$

où t_1 est l'instant du choc binaire. — Dans la présente note l'auteur montre que la définition (1) est dépourvue de sens pour $k \leq 2$. — Les raisonnements ultérieurs de Kivéliovitch sont aussi incertains.

Autoreferat.

Koebeke, Fryderyk: Über Hoëne-Wrońskis Überlegungen zur Himmelsmechanik und deren Wiederaufnahme durch einige neuere Autoren. Acta Astron., Ser. c. 3, 73—81 (1938).

Hoëne-Wroński hat sich, in meist unveröffentlichten Arbeiten, mit dem Ersatz des „empirischen“ Newtonschen Gravitationsgesetzes durch ein allgemeineres Kraftgesetz beschäftigt. Verf. zeigt, daß der Wrońskische Ansatz zwar aus dem Newtonschen hergeleitet werden kann, daß er aber, für sich betrachtet, leer ist und nicht zur Grundlegung einer Mechanik ausreicht. Die Ansätze zur Störungstheorie können allenfalls als Definitionsgleichungen intermediärer Bahnen Verwendung finden. Die Grundgleichungen Wrońskis zur Hydrostatik sind zu eng und nur bei radialsymmetrisch aufgebauten Flüssigkeiten verwendbar. Die Ablehnung, welche die mechanischen Arbeiten Wrońskis erfahren müssen, überträgt sich auf die Arbeiten neuerer Autoren (Demińczuk, Garcia und Jankowski), soweit sie auf den Wrońskischen Ansätzen fußen.

Klose (Berlin).

Bardon, José Robla: Regularisierung des ebenen Dreikörperproblems. Rev. Ci., Lima 38, Nr 420, 99—133 (1937) [Spanisch].

Unter Benutzung der von A. Rosenblatt [Atti Accad. naz. Lincei, Rend., VI. s. 6 (1926); Bull. Sci. math., II. s. 52 (1928); vgl. auch G. García und A. Rosenblatt, dies. Zbl. 16, 380 u. 17, 137] betrachteten kanonischen Koordinaten wird für die binären Stöße im ebenen Dreikörperproblem die angenäherte Form einer im Phasenraum lokalen Bedingung ausgerechnet.

Wintner (Baltimore).

Astapowitsch, I. S.: On a new method to determine the elements of meteoric trajectory in the atmosphere. Astron. J. Soviet Union 15, 110—117 u. engl. Zusammenfassung 117 (1938) [Russisch].

Horák, Zdeněk: Sur la détermination du radiant d'un courant météorique observé. Čas. mat. fys. 67, 222—232 (1938) [Tschechisch].

Dans cet article, j'envisage la question de la détermination du radiant du point de vue théorique, en me plaçant dans l'hypothèse que les cordonnées des extrémités de tous les trajets, obtenus par l'observation, sont d'égale précision. Par là, je parviens à une condition qui, en cas de trajets d'égale longueur, se réduit à peu près à celle trouvée par M. Svoboda comme la plus exacte.

Autoreferat.

Friedman, Bernard: Analyticity of equilibrium figures of rotation. Trans. Amer. Math. Soc. 43, 183—198 (1938).

Für eine Gleichgewichtsfigur einer rotierenden homogenen gravitierenden Flüssigkeit hat Lichtenstein, Math. Z. 1, 270—276 (1918), gezeigt, daß, kurz gesagt, die Oberfläche Ableitungen aller Ordnungen besitzt. Der Nachweis des analytischen

Charakters stand noch aus. Daß er in gewissen Fällen mit der Methode der unendlich vielen Variablen erbracht werden kann, hat Wintner, *Math. Z.* 28, 453 (1928), angegeben, aber später nicht näher ausgeführt. E. Hopf, *Bull. Amer. Math. Soc.* 37, 821 (1931), hatte den Gedanken, die von ihm im Anschluß an E. Levi für den analytischen Charakter der Lösungen elliptischer Differentialgleichungen, *Math. Z.* 34, 194 (vgl. dies. Zbl. 2, 340), entwickelte Methode auf die Lösungen der nichtlinearen Integrodifferentialgleichung des Problems der Gleichgewichtsfiguren anzuwenden. Dies hat Verf. auf Anregung von Hopf für Gleichgewichtsfiguren mit Rotationssymmetrie durchgeführt, er hat den analytischen Charakter der Oberfläche $z = z(x, y)$ bewiesen, abgesehen von den vielleicht vorhandenen Punkten in der Symmetrieebene $z = 0$ senkrecht zur Rotationsachse, in denen die Schwerkraft verschwindet. — Durch ganz einfache Abschätzungen und durch Differentiation gewinnt Verf. ein System von nichtlinearen Integralgleichungen, dem auch für komplexe Werte der unabhängigen Variablen x, y ein Sinn beigelegt werden kann. Von diesem wird die komplexe Lösung ermittelt, die mit der bereits bekannten reellen Lösung der reellen Gleichung für reelle Werte x, y übereinstimmt. Das gelingt durch sukzessive Approximationen; die erhaltenen Funktionen sind zwar noch nicht analytisch, aber die Ausdrücke, deren Verschwinden die Cauchy-Riemannschen Gleichungen ausmacht, konvergieren, wie gezeigt wird, gleichmäßig gegen Null, was den analytischen Charakter der Grenzfunktion beweist. *E. Hölder.*

Dive, Pierre: *Analyticité du carré de la vitesse angulaire d'un astre fluide.* C. R. Acad. Sci., Paris 206, 987—988 (1938).

Für eine permanent rotierende, ellipsoidale geschichtete Flüssigkeitsmasse zeigt Verf., daß das Winkelgeschwindigkeitsquadrat eine reguläre analytische Funktion des Abstandsquadrats von der Rotationsachse sein muß. *E. Hölder* (Leipzig).

Relativitätstheorie.

García, G.: *Le equazioni generali della dinamica relativista ristretta.* Atti Accad. naz. Lincei, Rend., VI. s. 27, 23—26 (1938).

Einstein, A., L. Infeld and B. Hoffmann: *The gravitational equations and the problem of motion.* Ann. of Math., II. s. 39, 65—100 (1938).

The authors set up a general method of successive approximations for the determination of the equations of motion of any number of particles under the influence of their mutual gravitation, and apply the method in particular to the case of two particles. The theory is based solely on the field-equations $R_{\mu\nu} = 0$ for empty space-time, in which the particles are line-singularities. The energy tensor is not employed nor the principle that the path of a free particle is a geodesic. — Greek suffixes having the range 0, 1, 2, 3 and Latin 1, 2, 3, let the fundamental tensor be $g_{\mu\nu}$ and let $\eta_{\mu\nu} = 0$ if $\mu \neq \nu$, $= 1, -1, -1, -1$ if $\mu = \nu = 0, 1, 2, 3$, resp. The authors define $h_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} - \eta_{\mu\nu}$, $\gamma_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}\eta_{\sigma\varrho}h_{\sigma\varrho}$, and suppose the coordinates x^μ so chosen that the "coordinate conditions"

$$\gamma_{0s}|_s - \gamma_{00}|_0 = 0, \quad \gamma_{ms}|_s = 0, \quad (|\mu = \partial/\partial x^\mu), \quad (*)$$

are satisfied. The field-equations become $\gamma_{\mu\nu}|_{ss} = 2\Lambda_{\mu\nu}$, where $\Lambda_{\mu\nu}$ are certain expressions involving $\gamma_{\mu\nu}, \gamma_{\mu\nu}|_\varrho, \gamma_{\mu\nu}|_{\varrho\sigma}$. The determination of the field is equivalent to the determination of $\gamma_{\mu\nu}$, which are assumed to vanish at infinity and to possess only "simple poles". — The essence of the paper is the method of successive approximation. A parameter λ is introduced and τ defined as $\tau = \lambda x^0$: then τ, x^m are considered as the independent variables, with the notation $\Phi_{,0} = \partial\Phi/\partial\tau$. Solutions are sought in the form of power series

$$\gamma_{00} = \sum_{l=1}^{\infty} \lambda^{2l} \gamma_{00, 2l}, \quad \gamma_{0n} = \sum_{l=1}^{\infty} \lambda^{2l+1} \gamma_{0n, 2l+1}, \quad \gamma_{mn} = \sum_{l=2}^{\infty} \lambda^{2l} \gamma_{mn, 2l},$$

where the coefficients in the power series are functions of τ, x^m , regular save at the particles (point-singularities in $\tau = \text{const}$). When these expressions are substituted in $A_{\mu\nu}$, series result which may be expressed in a similar notation. The field equations are to be satisfied for arbitrary λ , and hence we are led to an infinite sequence of equations. With these are associated the coordinate conditions (*), but the latter are not treated as identities in λ . By some rather intricate reasoning the authors arrive at the following set of equations for the q -th approximation ($l = 1, 2, \dots q$):

$$\gamma_{00|ss} = \frac{2A_{00}}{2l}, \quad \gamma_{0n|ss} = \frac{2A_{0n}}{2l+1}, \quad \gamma_{mn|ss} = \frac{2A_{mn}}{2l},$$

$$\gamma_{00,0} = \gamma_{0n|n} = 0, \quad \gamma_{mn|n} = - \sum_{k=1}^p \left\{ \frac{c_m^k(\tau)}{2l} \right\} \frac{k}{r},$$

where p is the number of particles, $\xi^k(\tau)$ the coordinates of particle k ,

$$r = \left[\left(x^s - \xi^s \right) \left(x^s - \xi^s \right) \right]^{\frac{1}{2}} \quad \text{and} \quad \frac{c_m^k(\tau)}{2l} = \frac{1}{4\pi} \int \frac{2A_{mn} N^n dS}{r^2},$$

this integral being taken over a 2-space in $\tau = \text{const}$ enclosing particle k , N^n being the unit normal to the 2-space in a Euclidean sense. We have also

$$\sum_{l=1}^q \lambda^{2l} \frac{c_m^k(\tau)}{2l} = 0, \quad (k = 1, \dots p),$$

which give the equations of motion of the particles. It would appear that the result involved λ explicitly, but this is not the case: λ disappears on reintroducing x^0 instead of τ . — The consequences of the above system are studied up to $q = 3$. For $q = 2$ the Newtonian equations of motion are deduced. For $q = 3$ attention is directed to the case of two particles: if $\overset{1}{m}, \overset{2}{m}$ are the masses, the equations of motion of $\overset{1}{m}$ are

$$\ddot{\eta}^m - \overset{2}{m} \frac{\partial(1/r)}{\partial \eta^m} = \overset{2}{m} \left\{ \dot{\eta}^s \dot{\eta}^s + \frac{3}{2} \dot{\xi}^s \dot{\xi}^s - 4 \dot{\eta}^s \dot{\xi}^s - 4 \overset{2}{m}/r - 5 \overset{1}{m}/r \right\} \frac{\partial}{\partial \eta^m} (1/r)$$

$$+ [4 \dot{\eta}^s (\dot{\xi}^m - \dot{\eta}^m) + 3 \dot{\eta}^m \dot{\xi}^s - 4 \dot{\xi}^s \dot{\xi}^m] \frac{\partial}{\partial \eta^s} (1/r)$$

$$+ \frac{1}{2} \frac{\partial^3 r}{\partial \eta^s \partial \eta^r \partial \eta^m} \dot{\xi}^s \dot{\xi}^r \},$$

where η^m, ξ^m are the coordinates of the particles and r their distance apart, and the dot means d/dx^0 .

J. L. Synge (Toronto).

Robertson, H. P.: Note on the preceding paper: The two body problem in general relativity. *Ann. of Math.*, II. s. 39, 101—104 (1938).

The approximate equations of motion of two gravitating particles, as given by Einstein, Infeld and Hoffmann (see the prec. review) are integrated to the same degree of approximation in the present paper, with emphasis on the effects on the orbit of a double star. The author shows that the velocity of the centre of gravity of a double star should show no secular change due to this relativistic effect, and contrasts this result with conclusions obtained from other theories, particularly that of Levi-Civita (this *Zbl.* 16, 282). He finds that the shape of the relative orbit undergoes no progressive change, but that there is an advance of periastron equal to the advance predicted by classical relativity for the orbit of an infinitesimal planet about a fixed centre whose mass is equal to the sum of the masses of the components of the double star.

J. L. Synge (Toronto).

Stockum, W. J. van: The precession of the inertial frame of a rotating body. *Proc. Roy. Irish Acad. A* 44, 109—122 (1938).

In an earlier paper (this *Zbl.* 16, 283) the author obtained a solution of Einstein's gravitational equations for the case of an infinite liquid cylinder rotating with an angular velocity just sufficient to make the internal pressure zero. In the present

paper he extends his results by obtaining, to a second approximation, a solution of the field equations for the case of a rotating liquid of any shape and internal pressure consistent with equilibrium. His main emphasis is on his deduction that the inertial rest frame of an observer on the axis of the fluid rotates relative to the general sidereal inertial frame. Considering in particular the field of a slowly rotating spheroid, he is led to the conclusion that, for the earth, this gravitational precession of the inertial frame amounts to about 65'' per century, and is therefore large compared with de Sitter's value of 1''.94 for the precession due to the perturbation of the earth's gravitational field by that of the sun (Eddington, *Math. Theory of Relativity*, § 44). *H. S. Ruse*.

Fiorentini Campolieti, Flora: Spostamento delle righe spettrali in una particolare soluzione del problema cosmologico. *Ist. Lombardo, Rend.*, III. s. 71, 49—57 (1938).

The author obtains a formula for the displacement of nebular spectral lines in the spherically symmetrical universe

$$ds^2 = V^2(dx^0)^2 - H^2(d\rho^2 + \rho^2 d\vartheta^2 + \rho^2 \sin^2\vartheta d\varphi^2),$$

where V, H are functions of x^0, ρ only, and applies it to the particular case of Tolotti's universe, viz. that for which $V=1$ and $H = \exp[h_1(x^0)]/(a\rho^2 + b)$. To a first approximation the spectral displacement varies as the distance r , and to a second approximation is given by a formula of the type

$$\frac{d\nu}{\nu} = Ar + Br^2.$$

(Some of the results of this paper are used by the author in a similar investigation, which, though already abstracted in this *Zbl.* 18, 187, is subsequent to the present work. *Ref.*)

H. S. Ruse (Southampton).

Kosambi, Damodar D.: Les métriques homogènes dans les espaces cosmogoniques. *C. R. Acad. Sci., Paris* 206, 1086—1088 (1938).

The author considers the problem of finding homogeneous metrics (Riemannian, Finsler, etc.) with respect to which the differential equations of free particles in Milne's Relativity are those of the extremals.

H. S. Ruse (Southampton).

Hosokawa, Tōyomon: Many-body problem in wave geometry. I. *J. Sci. Hiroshima Univ. A* 8, 29—41 (1938).

The author first discusses matrices $\overset{0}{a}_i$ odd in number satisfying the orthogonality conditions $\frac{1}{2}(\overset{0}{a}_i \overset{0}{a}_j + \overset{0}{a}_j \overset{0}{a}_i) = \delta_{ij}$, noting the relation of his work to the independent work of Givens (this *Zbl.* 16, 321). To apply the methods of wave geometry (cf. this *Zbl.* 17, 237—238, where references to the earlier work of the Hiroshima school will be found) to the problem of n bodies, a space V_{4n} and $(4n+1)$ orthogonal matrices are required. The paper is chiefly devoted to the case of two bodies, so that the space is V_8 , with coordinates x^α ($\alpha, \beta, \lambda, \mu = 1, \dots, 8$); nine numerical orthogonal matrices $\overset{0}{a}_\lambda$ of order 16 are given ($\bar{\lambda}, \bar{\mu}, \bar{\omega} = 1, \dots, 9$). — The other essential ingredients of the theory are 81 real functions of position $\bar{h}_{\bar{\mu}}^{\bar{\lambda}}$ and coefficients of connection $\Gamma_{\beta\gamma}^\alpha$. Then $\alpha_{\bar{\lambda}}$ is defined as $U \bar{h}_{\bar{\lambda}}^\mu \bar{a}_{\bar{\mu}} U^{-1}$, where U is an arbitrary matrix of order 16: ψ being a 1—16 matrix, the left direct product of 1—4 matrices Φ, χ , it is shown that the equation $\varrho^\lambda \alpha_{\bar{\lambda}} \psi = 0$ possesses solutions ϱ^λ such that, if $g_{\lambda\mu} = \bar{h}_{\bar{\lambda}}^\omega \bar{h}_{\bar{\mu}}^\omega$, then $g_{\lambda\mu} \varrho^\lambda \varrho^\mu = 0$. If $\varrho^\lambda \alpha_{\bar{\lambda}} \psi = 0$ is invariant under parallel displacement, a partial differential equation for ψ results. Assuming a Riemannian connection, so that $g_{\bar{\lambda}\bar{\gamma}} = \delta_{\bar{\lambda}\bar{\gamma}}$, $\left\{ \begin{smallmatrix} \bar{\lambda} \\ \bar{\mu}\bar{\nu} \end{smallmatrix} \right\} = \Gamma_{\bar{\mu}\bar{\nu}}^{\bar{\lambda}}$, the author investigates the conditions under which a solution exists with all components of ψ zero except $\psi_1, \psi_2, \psi_5, \psi_6$, and obtains finally

$$\begin{aligned} R_{\bar{\lambda}\bar{\mu}}^{\cdot\alpha\beta} \bar{h}_{[\alpha}^a \bar{h}_{\beta]}^b &= \frac{1}{2} \varepsilon_{abcd} R_{\bar{\lambda}\bar{\mu}}^{\cdot\alpha\beta} \bar{h}_{[\alpha}^c \bar{h}_{\beta]}^d, \\ R_{\bar{\lambda}\bar{\mu}}^{\cdot\alpha\beta} \bar{h}_{[\alpha}^A \bar{h}_{\beta]}^B &= -\frac{1}{2} \varepsilon_{ABCD} R_{\bar{\lambda}\bar{\mu}}^{\cdot\alpha\beta} \bar{h}_{[\alpha}^C \bar{h}_{\beta]}^D, \\ R_{\bar{\lambda}\bar{\mu}}^{\cdot\alpha\beta} \bar{h}_{[\alpha}^a \bar{h}_{\beta]}^B &= 0, \end{aligned}$$

where R_{\dots} is the curvature tensor, the ϵ 's permutation symbols, and $a, b, c, d = 1, 2, 3, 4$; $A, B, C, D = 5, 6, 7, 8$. These equations may be compared with Morinaga's equations in V_4 (see this Zbl. 12, 232).

J. L. Synge (Toronto).

Astrophysik.

● Unsöld, A.: *Physik der Sternatmosphären mit besonderer Berücksichtigung der Sonne*. Berlin: Julius Springer 1938. VIII, 500 S. u. 145 Fig. RM. 63.—

This book is the first one to be devoted exclusively to the theory of stellar atmospheres. It does not claim to present new material which has not been published elsewhere, but it contains the first connected and critical account of very recent work on the subject. In many cases the author gives new formulations of the theory. He gives many tables and graphs of astrophysical results and of important data required in applying the theory to their interpretation. Discussions of general physical theory and of observational methods are given only where it is considered that other accounts do not exist in forms suited to the immediate purposes of the book. The book is in five parts, divided into chapters of which the titles and some of the chief contents are as follows: Part I. Stellar atmospheres in thermal equilibrium. 1. Radiation theory. Standard classical and quantum theory treatments of the thermodynamics of radiation. 2. Applications of Planck's law to solar radiation. Radiation measurement. Starting with a description of methods of measuring absolute intensities and of allowing for absorption in the earth's atmosphere, the observations giving the intensity distribution in the continuous solar spectrum, and the "solar constant" are discussed. Limb-darkening. Distortion of the continuous spectrum by Fraunhofer lines. 3. Stellar radiation. Spectral classification. Intensity distribution in spectra, and colour temperatures. Russell-Hertzsprung diagram. Mass-luminosity relation. 4. Thermal ionisation and excitation. Saha's theory and its observational verification. Part II. Continuous spectrum and constitution of a stellar atmosphere. 5. Radiative equilibrium and continuous spectrum of the stellar atmosphere. Various approximate solutions of equation of radiative equilibrium. Dependence of limb-darkening on wavelength, and its relation to the continuous absorption coefficient. Blanketing effect of reversing layer. 6. Continuous absorption coefficient and energy distribution in stellar spectra. Theoretical estimation of absorption coefficient and application. 7. Constitution of stellar atmosphere. Part III. Physical foundations of theory of Fraunhofer lines. 8. Classical theory. Lorentz electron theory of line-formation. Classical theory of collision- and radiation-damping, of Rayleigh- and resonance-scattering, and of Doppler line-widths. 9. Quantum theory. Quantum theoretical treatment of subjects of Chapter 8. Oscillator strengths (f). Pressure widening. Multiplet intensities. 10. Experimental tests of the theory and measurement of transition-probabilities. Laboratory f -values. Part IV. Measurement and interpretation of intensity distribution in Fraunhofer lines. 11. Measurement of contours and total absorption of Fraunhofer lines. Theory of spectrograph and photographic plate. Calibration of Rowland intensities. 12. Radiative equilibrium and Fraunhofer lines. Mathematical theory and comparison of various theoretical models of a stellar atmosphere. "Number of atoms above the photosphere." Applications. 13. Interpretation of Fraunhofer lines. "Curve of growth." Widening of lines by turbulence, pressure, interatomic Stark effect, interaction between atoms of same species. Central intensities. Interlocking of lines. Blends. Details for particular lines. 14. Effect on line contours of rotation and expansion of the star. Determination of rotation speeds. Part V. Problems and applications of the quantitative theory of stellar spectra. 15. Application of the theory of Fraunhofer lines. Problem of spectral classification and spectroscopic parallaxes. Discussion of suggestions for extending the two-dimensional classification, in particular the question of introducing chemical composition as a third parameter. Quantitative analysis of sun's atmosphere. 16. Structure of outer layers of sun. Observation and theory of solar activity. Spots, prominences, faculae. Convection and relation to granulation. 17. Boundary of the sun. Prominences, Chromosphere and Corona. Spectroheliograms. Motions of prominences. Theories of the chromosphere. Observation and theory of the continuous and line spectrum of the corona. Interpretation of spectroheliograms. Appendix A. Classification of line spectra. Appendix B. The integral-exponential function ($K_n = \int_1^\infty e^{-zw} w^{-n} dw$). A classified bibliography gives references to 1783 monographs and papers. Consideration of band spectra and nebular luminosity is omitted on account of their treatment by Rosseland in his recent book (this Zbl. 14, 234).

W. H. McCrea (Belfast).

Swings, P., et P. Ledoux: *Le profil des raies d'absorption dans une atmosphère stellaire stratifiée*. Bull. Soc. Roy. Sci. Liège 7, 179—187 (1938).

In the introduction to the present paper the authors briefly describe and discuss the various methods available for the integration of the equation of radiative transport.

They then discuss more in detail a method due to ten Bruggencate, in which the stellar atmosphere is divided up into a sufficiently large number of layers, so that the quantity $1/(1 + \eta_\nu)$ can be regarded as constant in each layer ($\eta_\nu = l_\nu/k_\nu$; l_ν = coefficient of selective absorption at frequency ν , k_ν = continuous absorption coefficient at frequency ν). The equation of transport can then be integrated analytically within each layer, the constants of integration being determined by the boundary and continuity conditions. The solution can be conveniently expressed in terms of certain determinants. Finally, by way of illustration, a special case is worked out numerically.

Steensholt (Oslo).

Gamow, G.: Nuclear energy sources and stellar evolution. Phys. Rev., II. s. 53, 595—604 (1938).

Stellar radiation is probably produced by thermonuclear reactions in the star's interior. If it is due to ordinary nuclear penetration, the author shows that the rate of energy-production per unit mass ε is given approximately by

$$\varepsilon \sim xu\rho T^{-2/3} \exp(-A/T^{1/3}), \quad (1)$$

when A is given in terms of atomic constants, ρ is the density, x the hydrogen content, and u the content of the nuclear catalizer for the process of transformation of hydrogen into heavy hydrogen (compare v. Weizsäcker, this Zbl. 16, 186). The magnitude of A , and of the values of T occurring in a star, results in the value of ε being so much greater near the centre of the star than elsewhere that a star in which the energy is generated according to this law must conform very closely to Eddington's "point-source" model. If, however, the nuclei bombarded by protons possess a resonance-maximum E_r in the region of the thermal energies occurring in the stellar interior, the rate of energy-generation is given by

$$\varepsilon \sim xu\rho T^{-3/2} \exp(-3T_r/2T), \quad (2)$$

which possesses a maximum for $T \cong T_r = 2E_r/3k$. This is an example of a process with a "selective temperature". Another type is discussed by the author (on the suggestion of E. Teller). This arises from the possibility of a chain of nuclear reactions involving the nucleus ${}^4\text{Be}^8$, which is a possible alternative to the chain involving ${}^2\text{He}^4$ suggested by v. Weizsäcker. If the ${}^4\text{Be}^8$ nuclei are stable, but have a very small binding energy Δm , then the temperature will affect their dissociation into ${}^2\text{He}^4$ nuclei. If the temperature is high most of the ${}^4\text{Be}^8$ nuclei will dissociate into helium, while if it is low fewer protons have sufficient energy to penetrate the ${}^4\text{Be}^8$ nuclei. So again there is a "selective temperature" $T_s (\cong \Delta mc^2/k)$ between these extremes for energy-generation by means of this reaction chain. The author derives for this case the formula

$$\varepsilon \sim xy^2\rho^2 T^{-2/3} \exp(\Delta mc^2/kT - A/T^{1/3})/C + \exp(\Delta mc^2/kT), \quad (3)$$

where y is the helium content, and C is a constant. He goes on to apply these formulae to the problem of stellar evolution. Applying (1) with the aid of the "point-source" model and the theory of homologous configurations he shows that the central temperature and luminosity of a star of given mass will rapidly increase in the process of stellar evolution, giving results not in agreement with the lines of constant mass in the Hertzsprung-Russell diagram. Also difficulties arise in connection with the hydrogen content of the stars. On the other hand, if there is a "selective temperature" for energy-generation, this generation will take place effectively only in a shell at this temperature [T_r or T_s if (2) or (3) applies]. The author shows qualitatively that the resulting "shell-source" model will not be open to the objections raised against the point-source model. Also it will not show in particular the over-stability discovered by Eddington for the point-source model with a strong temperature dependence of the energy-source.

W. H. McCrea (Belfast).

Kopal, Zdeněk: On the form of rotating-gas configurations. Monthly Not. Roy. Astron. Soc. 98, 414—424 (1938).

The author treats this problem by starting with the general theory of a slowly rotating gas spheroid given by Clairaut. The latter showed that the oblateness e

of the spheroid is to a first approximation C times the ratio of centrifugal force to gravity at the equator, where C is determined in terms of a_1 , the semi-major axis of the spheroid, and a function φ satisfying the differential equation

$$\left(a^2 \frac{d^2 \varphi}{da^2} - 6\varphi\right) \int_0^a \rho a^2 da + 2\left(a \frac{d\varphi}{da} + \varphi\right) \rho a^3 = 0. \quad (1)$$

Here a is the semi-major axis of the surface over which the density is ρ , such that $a = a_1$ and $\rho = 0$ at the boundary. The author shows how to integrate (1) when ρ is known as a function of a , and he considers three models, namely the polytropic model, the model in which ρ, a are connected by a relation of the form

$$a^2 \frac{d\rho}{da} = -k^2 a^m \int_0^a \rho a^2 da,$$

and the model in which they are connected by a relation of the form

$$\frac{3}{a^3} \int_0^a \rho a^2 da = \rho_0 (1 - a)^\mu. \quad (\mu > 0)$$

He indicates that the results for the polytropic model agree with those of Chandrasekhar (this Zbl. 7, 39, 134, 264) derived by a different method. The other two cases are dealt with by numerical methods, and the results for all three are shown in a graph of C as a function of the density condensation ρ_c/ρ_m , when ρ_c, ρ_m are the central and mean densities. The object is to see how far the oblateness provides a measure of the density condensation, and how far it depends on the particular model used. The author concludes that for small values of C (near to $\frac{3}{2}$) the problem of determining from C the density condensation remains indeterminate in so far as we are ignorant of the internal density distribution. But for larger values of C , which are in fact those of importance in astronomical applications, C is to a large extent characteristic of the density condensation alone. The results of the paper apply only to models with a negative density gradient throughout.

W. H. McCrea (Belfast).

Rosseland, S., and G. Randers: On the stability of pulsating stars. *Astrophys. Norvegica* 3, 71—86 (1938).

Rosseland (this Zbl. 2, 439; 3, 382) has already given a detailed theory of stellar pulsations under very general conditions. The object of the present work is to find the consequences of assuming that the energy-generation is due to nuclear synthesis, in particular according to the processes discussed by v. Weizsäcker (this Zbl. 16, 186). The methods of the previous papers are used for treating the pulsations, and then the equations of nuclear transformations in a pulsating star are formulated. The theory is then applied to cases in which certain important chains of nuclear interactions studied by v. Weizsäcker are supposed to occur. It is verified that there is a phase delay of decisive importance in the energy-generation if the life-period of the radioactive nucleus entering into the chain is comparable with the vibration period of the star. The significance of such a delay was previously pointed out by Eddington (*Internal Constitution of the Stars* 1926); it is capable of rendering the vibrations stable. However, further analysis shows that, with a long chain of collision processes among nuclei preceding the final disintegration into α -particles, other effects may appear which tend to increase the instability.

W. H. McCrea (Belfast).

Sen, N. R.: On the expansion of a nebula. *Bull. Calcutta Math. Soc.* 29, 185—196 (1938).

If the expansion of the universe be ascribed to the "cosmic repulsion" associated with the appearance of the cosmical constant λ in the general relativity field equations, then the effect is approximately the same as that produced by a repulsive force, proportional to the distance from the observer, as treated on Newtonian mechanics. The author notes this, and seeks to discuss the orbit of a star in a galactic system by inserting a term corresponding to this repulsion in the equation for the orbit of a

particle round a massive central body derived from Einstein's field equations without the λ term. For motion in any plane there will then be a critical circle (radius r_0) outside which the resultant force is repulsive and inside which it is attractive. If a particle crosses the circle $r = r_0$ its orbit must extend to infinity. In the application to a galactic system a star in such an orbit would escape from the system, and if such orbits occur in an actual case there must be a diffusion of matter away from the system, which may be described as an expansion of the system. The author considers the mechanical problem involved in some detail, investigating the types of orbit occurring under different circumstances of projection. He then inserts numerical values appropriate to the application to galaxies, and concludes that for the upper bound of the mass of a galaxy no instability due to cosmical repulsion will arise, but for the lower limit of mass, and for extension comparable to that of our own galaxy, there is likely to be unstable material near the boundary. *W. H. McCrea (Belfast).*

Machiels, André: À propos d'un critérium de la réalité des vitesses des nébuleuses. C. R. Acad. Sci., Paris **204**, 1708—1710 (1937).

Nach Hubble wird die Helligkeit eines außergalaktischen Nebels um den Faktor $\left(1 + \frac{d\lambda}{\lambda}\right)^{-2}$ reduziert, wenn die Rotverschiebung $\frac{d\lambda}{\lambda}$ durch eine wirkliche Geschwindigkeit verursacht ist, andernfalls nur um den Faktor $\left(1 + \frac{d\lambda}{\lambda}\right)^{-1}$. Dieser Alternative stellt der Verf. seine Überzeugung entgegen, daß sich aus der prinzipiellen Behandlung des Dopplereffektes durch Einstein (1905) auch für den Fall wirklicher Geschwindigkeit der Faktor $\left(1 + \frac{d\lambda}{\lambda}\right)^{-1}$ ergibt. *Straßl (Göttingen).*

Eslangon, Ernest: Sur la rotation de la galaxie. C. R. Acad. Sci., Paris **206**, 468—471 (1938).

Verf. bemerkt, daß die Unstimmigkeiten, die sich ergeben, wenn man Radialgeschwindigkeiten einerseits, Eigenbewegungen andererseits unter der Voraussetzung einer Rotation der Milchstraße um ein fernes Zentrum behandelt, darauf beruhen könnten, daß die Eigenbewegungen relativ zu einem selbst in Deformation befindlichen Raumelement bestimmt werden. Aus der Untersuchung des Geschwindigkeitsfeldes durch Mineur schließt er, daß starke von Ort zu Ort veränderliche Abweichungen von dem einfachen Schema der Rotation um eine ferne Achse vorhanden sind. *Straßl.*

Ambarzumian, V.: Zur Statistik der Doppelsterne. Astron. J. Sowiet Union **14**, 207—228 (1936) [Russisch].

Im ersten Teil wird gezeigt, daß die Anzahl der Doppelsternsysteme, deren Exzentrizität unterhalb eines vorgegebenen Wertes ϵ liegt, proportional zu ϵ^2 ist, wenn die (von den auf den Hauptstern bezogenen Lagen- und Impulskoordinaten des Begleiters abhängige) Verteilungsfunktion der Systeme eine beliebige Funktion des Energieintegrals allein ist. Auch wenn man die Proportionalität mit ϵ^2 als empirisch gesichert ansieht, kann man also noch nicht auf die Form der Verteilungsfunktion schließen. — Aus der von Öpik abgeleiteten Verteilungsfunktion der beobachteten Distanzen wird die Verteilung der Energien abgeleitet und festgestellt, daß diese von einer Boltzmannverteilung sehr stark abweicht. Das Material des Aitkenschen Kataloges bestätigt diesen Befund. — Für die Doppelsterne, deren große Halbachse 10^{13} bis 10^{14} a. E. beträgt, wird die Relaxationszeit zu 10^{10} — 10^{11} Jahren ermittelt. Die Tatsache, daß Boltzmannverteilung der Energien noch nicht vorhanden ist, spricht gegen die „lange“ Entwicklungsskala. Zu demselben Schluß führt die Betrachtung des Verhältnisses der Anzahl der Systeme mit großen Distanzen und der Einzelsterne im Zustand des Dissoziationsgleichgewichts. *Straßl (Göttingen).*

Jehle, Herbert: Wellenmechanische Betrachtungen zur Theorie der Sternsysteme. Z. Astrophys. **15**, 182—224 (1938).

The author puts forward the idea that, just as in the microscopic physics of charged particles we can formulate a wave-mechanical treatment which in particular gives information about average or statistical charge distributions, so in the macroscopic

physics of an assembly of gravitating particles we might expect to be able to follow an analogous procedure in order to obtain statistical properties. His suggestion for obtaining an appropriate wave equation is to write down the general relativity equations of motion, then to derive the corresponding Hamilton-Jacobi equations, and finally in the latter to replace the momenta $\partial W/\partial x'$ (say) by operators $\sigma\hbar/i\partial x'$ and so obtain a wave equation for a wave-function ψ . There is no suggestion that the constant σ has here anything to do with the quantum of action, but the question arises as to how it is to be determined. The author gives reasons for considering it plausible to take σ to be of the order of magnitude of the total mass M (gravitational units) of the system considered. He then discusses the form of his wave-equation corresponding to the Einstein-Hilbert first approximation to the general relativity equations. He proceeds to treat the analogues in his theory of the uncertainty principle, superposition principle, self-consistent field method, etc., in quantum wave-mechanics. He then applies these results to special problems. He gives a treatment of Saturn's rings by his methods. Then he discusses the relation between the semi-major axes of the orbits in a planetary system, which appears to be somewhat analogous to (though not identical with) the relation between quantised orbits in an atomic system. Finally the theory is applied to galaxies; it is found to give a relation between the mass and absolute diameter, and a value for the maximum flattening. The author finds a preference among his solutions for systems which have 180° symmetry, which he relates to the characteristics of spiral arms of galaxies.

W. H. McCrea (Belfast).

Dirac, P. A. M.: A new basis for cosmology. *Proc. roy. Soc., Lond. A* **165**, 199—208 (1938).

The author proposes as a basis for cosmology the principle that: "Any two of the very large dimensionless numbers occurring in Nature are connected by a simple mathematical relation, in which the coefficients are of the order of magnitude unity." Some of these numbers are of order 10^{39} . So if, for example, a and b are two such numbers this principle would give as a first approximation $a = kb$, where k is a constant of the order unity. Only this order of approximation is used in this paper. This principle is designed to replace Milne's Dimensional Hypothesis (see A. G. Walker, this Zbl. **15**, 279), but the author makes use of Milne's Cosmological Principle (this Zbl. **11**, 279), together with the hypothesis that at any point in the universe there is a "natural velocity" of matter providing a "preferred time-axis" at the point. The latter hypothesis is suggested by Hubble's observations. The author takes as unit time e^2/mc^3 (e, m = electronic charge, mass; c = velocity of light), unit length e^2/mc^2 , unit mass M (M = proton mass) and assumes that matter is conserved when expressed in this unit. If $f(t)$ is the distance between two neighbouring spiral nebulae, then it is shown that Hubble's constant is $f'(t)/f(t)$ which is 1.4×10^{-39} at the present epoch. Also the mean density ρ of matter $\propto \{f(t)\}^{-3}$ and is of the same order in these units as Hubble's constant. So the new principle would give $\rho = k f'(t)/f(t)$, where k is a constant of the order of magnitude unity. Hence $f(t) \propto t^{1/3}$, choosing a suitable zero for t . Thus the law of recession of the spiral nebulae is deduced. The author then shows that the only three-dimensional space $t = \text{constant}$ ("t-space") consistent with his assumptions is of zero curvature. The author next assumes that general relativity will have some applicability to the universe as a whole, but only when different units of time and distance are used, whose ratios to his original ones depend on the epoch. This is analogous to Milne's use of two units of time (this Zbl. **16**, 185) but the author obtains a ratio which is the inverse of Milne's. He then uses his form of $f(t)$, when transformed to the new units in the general relativity formulae given by Robertson (this Zbl. **6**, 231) and deduces a zero mean pressure. He concludes that these main consequences of his principle show that a satisfactory theory of cosmology can be built up from it.

W. H. McCrea (Belfast).